गणित

परिमार्जन समूह
श्री हरिश पन्त
श्री रमेशप्रसाद अवस्थी
श्री हरिचन्द्र श्रेष्ठ

स्वाध्ययन सामग्री

२०७४

प्रकाशक :

नेपाल सरकार

शिक्षा मन्त्रालय

शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर ।

प्रथम संस्करण – २०६४

दोस्रो संस्करण – २०६५

तेस्रो संस्करण – २०६६

चौथो संस्करण – २०६७

चौथो संस्करण – २०७४

टेलिफोन – ६६३०४५७, ६६३०१८०, ६६३८१५०

फ्याक्स – ६६३०१९३, ६६३०४५७

पो.ब.नं. – २१४५

E-mail - nced@nced.gov.np

मुद्रक : ....

सुझाव एवम् सल्लाह

श्री देवकुमारी गुरागाईं

श्री खगेन्द्र नेपाल

श्री शिवकुमार सापकोटा

श्री श्यामसिंह धामी

विषयवस्तु सम्पादन

श्री श्याम सिंह धामी

भाषा सम्पादन

श्री देव कुमारी गुरागाईं

कार्यक्रम संयोजन

श्री सुनिता बराल

आवरण तथा चित्राङ्कन डिजाइन

श्री खडोस सुनुवार

लेआउट डिजाइन तथा टाइप सेटिङ

श्री खडोस सुनुवार

भूमिका

शिक्षा समाज रूपान्तरणको एक प्रमुख माध्यम हो । परम्परागत शिक्षाप्रणाली तथा खुला शिक्षा पद्धति विद्यमान अवस्थामा शिक्षा हासिल गर्ने विविध पद्धतिहरू मध्ये एक हो । हाल कार्यान्वयनमा रहेको विद्यालयस्तरको पाठ्यक्रमअनुसार शिक्षामा पहुँच बढाउनका लागि खुला शिक्षा पद्धतिले प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष रुपमा महत्वपूर्ण भुमिका निभाएको छ ।

सबैका लागि शिक्षाको सुनिश्चितताका लागि परम्परागत शिक्षा प्रणाली मात्र पर्याप्त हुन सकेको छैन । विविध कारणले विद्यालय शिक्षा पूरा गर्न नसकेका समूह तथा विद्यालय वाहिर रहन वाध्य समूहलाई राज्यको तर्फबाट अवसर प्रदान गर्नु मुख्य दायित्व पनि हो । यसै परिप्रेक्ष्यलाई ध्यानमा राखी खुला शिक्षामार्फत विद्यालय सञ्चालन गर्ने व्यवस्था शुरुवात भएको छ । यद्यपि खुला विद्यालयको आफ्नै पाठ्यक्रम, पाठ्यसामग्री तथा शिक्षणसिकाइ प्रक्रिया हुन्छ । हाम्रो खुला विद्यालय विद्यमान पाठ्यक्रमकै आधारमा सञ्चालन हुने भए पनि पाठ्यवस्तु भने सरलीकरण गरी विकास गर्ने सन्दर्भमा यो स्वाध्ययन सामग्री तयार गरिएको हो । परीक्षामा सोधिने प्रश्नहरू पाठ्यपुस्तक केन्द्रित हुने भएकाले यो स्वाध्ययन सामग्री विद्यालयस्तरको पाठ्यक्रमभन्दा पनि पाठ्यपुस्तकलाई आधार मानी विद्यार्थीका लागि स्वाध्ययन गर्न सजिलो हुने गरी तयार पार्ने प्रयास गरिएको छ ।

पाठ्यपुस्तकको प्रत्येक एकाइमा परिचय, उद्देश्य, विषयवस्तु, क्रियाकलाप, पृष्ठपोषण र अभ्यास समावेश गरिएको छ । यस सामग्रीमा धेरै पाठ्यवस्तु तथा क्रियाकलापहरू समेटिएको भयपनि आवश्यकता अनुसार विद्यालयस्तरको पाठ्यपुस्तक पनि यो सामग्रीसँगै अध्ययन गर्नुपर्दछ । विद्यार्थीहरूले प्रत्येक पाठ अध्ययन गरिसकेपछि त्यस पाठमा दिइएका क्रियाकलापहरू नियमित रूपमा अभ्यास गर्नेछन् र सहजकर्ताबाट प्राप्त पृष्ठपोषणले सिकाइलाई बलियो बनाउँदै जानेछन् भन्ने हाम्रो विश्वास छ ।

खुला शिक्षा पद्धतिमा स्वाध्ययन सामग्री महत्वपूर्ण साधनको रूपमा रहेको हुन्छ । पाठ्यक्रमद्वारा निर्दिष्ट उद्देश्य पूरा गर्न यो सामग्री अवश्य पनि उपयोगी हुनेछ । यो स्वाध्ययनको लागि प्रमुख साधनको रूपमा लिनु पर्ने केही समुह छन् जस्तैः विशेष गरी खुला विद्यालयमा अध्ययनरत वा नियमित रुपमा विद्यालय जान नसक्ने, विद्यालय उमेर भन्दा माथिको उमेर समूह तर अहिले पढ्ने इच्छा र अनुकुल वातावरण भएका जो स्वअध्ययन गरी योग्यता अभिवृद्धि गर्न चाहन्छन त्यस्ता विद्यार्थीहरूका लागि सरल, सहज र भरपर्दो साधन बनाउन लेखकले अथक प्रयास गरेको पाइन्छ । यसको अधिकतम उपयोग भइ हाम्रो अपेक्षित लक्ष्य प्राप्ति हुन सकेमा मात्र राज्यको लगानीको सही सदुपयोग हुने देखिन्छ । यसैले प्रस्तुत स्वाध्ययन सामग्रीलाई सकेसम्म स्तरीय बनाउने प्रयास गरिएको छ । अघिल्लो संस्करणका लेखकहरु श्री इमनारायण श्रेष्ठ, श्री डण्डपाणी शर्मा, श्री मुकुन्द क्षेत्री, श्री बरुणप्रसाद वैद्य, श्री नारायणप्रसाद वाग्लेलाई केन्द्र धन्यवाद दिन चाहन्छ । यी लेखकबाट विकसित सामग्रीलाई माध्यमिक तहको परिमार्जित पाठ्यक्रम तथा पाठ्यपुस्तकअनुसार अझ बढी स्तरीय, सान्दर्भिक र विद्यार्थी मैत्री बनाउनका लागि परिमार्जन कार्यमा संलग्न श्री श्यामसिंह धामी, श्री रमेशप्रसाद अवस्थी, श्री हरिश पन्त, श्री हरिचन्द्र श्रेष्ठ लगायत सबैलाई हार्दिक आभार व्यक्त गर्दछु । यस सामग्रीमा अझ पनि कमीकमजोरीहरू रहन सक्ने भएकाले सुधार गरी अझ गुणस्तरीय र व्यावहारिक बनाउन सबैको रचनात्मक सुझावका लागि सम्बद्ध सबै पक्षमा केन्द्र हार्दिक अनुरोध गर्दछ ।

२०७४

देव कुमारी गुरागाईं

कार्यकारी निर्देशक

विषय सूची

एकाइ : 1

समूहहरू (Sets)

1. **परिचय :**

यस एकाईमा दुई वा तिन समूहसँग सम्बन्धित 4 अङ्क भारका प्रयोग तहका प्रश्नहरुको समाधानका बारेमा भेन चित्रको प्रयोग सहित चर्चा गरिएको छ ।

2. **सिकाइ उपलब्धि :**

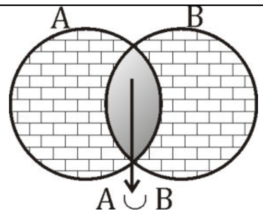
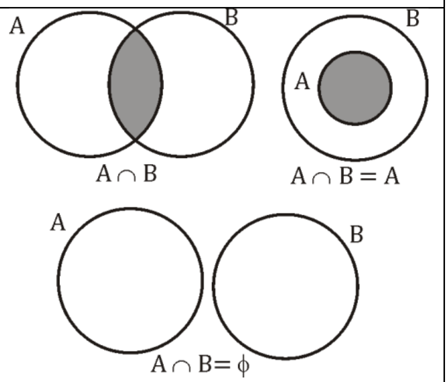
यस एकाइको अध्ययनपछि निम्नलिखित सिकाइ उपलब्धि हासिल हुनेछ :

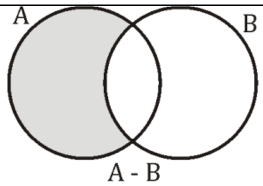
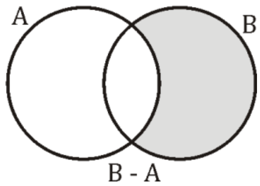
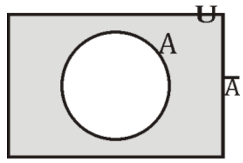
- समूहको गणनात्मकता सम्बन्धी शाब्दिक समस्याहरु भेन-चित्रको प्रयोगद्वारा समाधान गर्न ।
- समूहहरूको बिचको सम्बन्धका गुणहरू प्रयोग गरी व्यावहारिक समस्या समाधान गर्न ।

3. **आधारभूत विषयवस्तु :**

दुई अथवा तिन समूहसँग सम्बन्धित समस्याहरु समाधान गर्न अघिल्ला कक्षाहरुमा पढेका केहि विषयवस्तुको बारेमा जानकारी राख्नु आवश्यक हुन्छ ।

3.1. **समूहका क्रियाहरू (Set operations)**

समूहको प्रकार	समूहको व्याख्या	भेन-चित्रको प्रयोग
समूहहरुको संयोजन (Union of sets)	$A \cup B = \{x : x \in A$ वा $x \in B\}$ $A \cup B$ मा A र B का सबै सदस्यहरु पर्दछन् ।	
समूहहरुको प्रतिच्छेदन् (Intersection of sets)	$A \cap B = \{x : x \in A$ वा $x \in B\}$ $A \cap B$ मा A र B मा भएका सबै साँझा सदस्यहरु लिनु पर्दछन् ।	

समूहहरुको फरक (Difference of sets)	$A - B = \{x : x \in A$ र $x \notin B\}$ A -B मा समूह A का सबै सदस्यहरु जुन B मा पर्दैनन्लाई गणना गरिन्छ । $B-A = \{x : x \notin A$ र $x \in B\}$ B-A मा समूह B का सबै सदस्यहरूमा जुन A मा पर्दैनन् त्यसलाई गणना गरिन्छ ।	 
पूरक समूह (Complement of a set)	$\bar{A} = \{x : x \in U$ र $x \notin A\}$ $\bar{A}$ अथवा A' अथवा A^c सर्वव्यापक समूहमा पर्ने तर A का सदस्यहरु गणना गरिँदैन ।	

3.2 **समूहको गणनात्मकता (Cardinality of a set)**

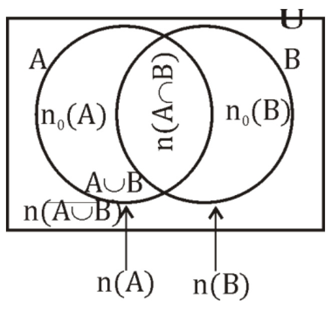
समूहका फरक-फरक सदस्यहरुको सङ्ख्यालाई त्यस समूहको गणनात्मकता भनिन्छ ।

समूहमको गणनात्मकतालाई संकेतमा n(A) लेखिन्छ । जस्तैः $A = \{a, e, i, o, u\}$ भए $n(A) = 5$ हुन्छ ।

4. **मुख्य विषयवस्तुः**

दुई अथवा तिन समूहहरुको गणनात्मकतालाई भेन-चित्रमा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ । भेन-चित्रबाट सूत्र पनि बनाउन सकिन्छ ।

(क) दुई समूह भएको पाठका लागि सूत्रहरू



$n_o(A) = n(A-B)$ र $n_o(B) = n(B-A)$ हुन्छ र पढ्दा $n_o(A)$ लाई only A र $n_o(B)$ र only B भनि पढिन्छ ।

दिइएको भेन-चित्रबाट निम्न सूत्रहरु बनाउन सकिन्छ ।

i. $n(A) = n_o(A) + n(A\cap B)$ अथवा, $n(A)-n(A\cap B) = n_o(A)$

ii. $n(B) = n_o(B) + n(A\cap B)$ अथवा, $n(B) - n(A\cap B) = n_o(B)$

iii. $n(A\cup B) = n_o(A) + n_o(B) + n(A\cap B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$

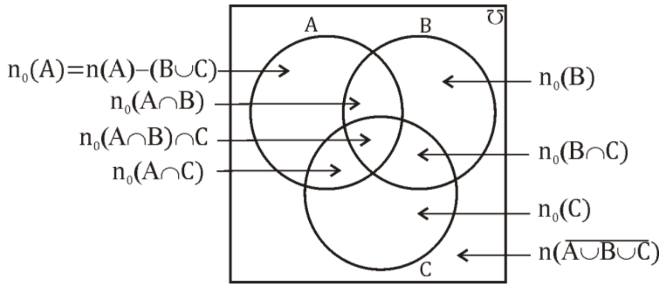
iv. $n(\overline{A\cup B}) = n(U) - n(A\cup B)$

यी सूत्रहरुलाई सरलीकरण गर्दा अन्य सूत्रहरु पनि बन्न सक्छन् । छलफल गर्नुहोस् ।

दुई समूहमध्ये कुनै एउटा मात्र समूहमा पर्ने सदस्य सङ्ख्या $= n_o(A) + n_o(B)$

दुई समूहमध्ये कम्तिमा एउटा समूहमा पर्ने सदस्य सङ्ख्या $= n(A\cup B)$

ख) तीनवटा समूहहरूको पाठसँग सम्बन्धी सूत्रहरू



चित्रबाट निम्न सूत्र निकाल्नुहोस् :

i) $n(A) = n_o(A) + n_o(A\cap B) + n_o(A\cap C) + n(A\cap B\cap C)$

ii) $n(B) = n_o(B) + n_o(B\cap C) + n_o(A\cap B) + n(A\cap B\cap C)$

iii) $n(C) = n_o(C) + n_o(A\cap C) + n_o(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)$

iv) कम्तिमा एउटा समूहमा पर्ने सदस्य सङ्ख्या

$n(A\cup B\cup C) = n_o(A) + n_o(B) + n_o(C) + n_o(A\cap B) + n_o(A\cap C) + n_o(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)$

or,

$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)$

or,

$n(A\cup B\cup C) = n(U) - n(\overline{A\cup B\cup C})$

v) कुनै एउटा मात्र समूहमा पर्ने सदस्य सङ्ख्या $= n_o(A) + n_o(B) + n_o(C)$

vi) दुई वटा मात्र समूहमा पर्ने सदस्य सङ्ख्या $= n_o(A\cap B) + n_o(A\cap C) + n_o(B\cap C)$

उदाहरणहरू हेरौँ :

1. कुनै एउटा सर्वेक्षणमा समभागीहरुमध्ये 220 जनाले स्याउ मात्र, 340 जनाले सुन्तला मात्र र 140 जनाले स्याउ र सुन्तला दुवै खान मन पराउने पाइयो । भेन-चित्रको माध्यमबाट दुइओटा मध्ये कम्तिमा एउटा खान मन पराउनेको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधानः

मानौ, स्याउ खान मन पराउनेको समूह 'A' र सुन्तला खान मन पराउनेको समूह 'O' छ ।

प्रश्न अनुसार, $n(A-O) = n_o(A)$

$= 220$

$n(O-A) = n_o(O)$

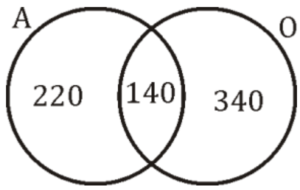
$= 340$

$n(A\cap O) = 140$

$n(A\cup O) = ?$

दिइएको जानकारीलाई भेन-चित्रमा प्रस्तुत गर्दा चित्र (क) को (iii) को सुत्र,

कम्तिमा एउटा खान मन पराउने



$$n(A \cup O) = n_o(A) + n_o(O) + n(A \cap O)$$
$$= 220 + 340 + 140$$
$$= 700$$

$\therefore$ 700 जनाले दुइओटामध्ये कम्तिमा एउटा खान मन पराउने भेट्टाइयो ।

2. 3200 जनाको सर्वेक्षणमा 1800 जनाले फुटबल, 2000 जनाले बास्केटबल र 1200 जनाले दुवै खेल खेल्न मन पराउने भेट्टाइयो । भेन-चित्रको माध्यमबाट कुनै पनि खेल खेल्न मन नपराउनेको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

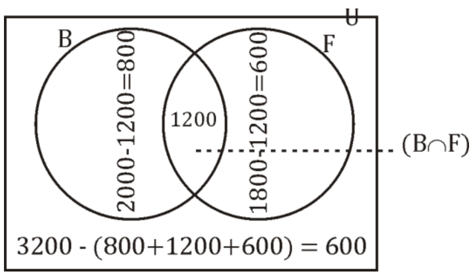
समाधान

मानौँ सर्वेक्षणमा भाग लिनेहरुको समूह U, फुटबल खेल्न मन पराउनेहरुको समूह 'F' र बास्केटबल खेल्न मन पराउनेको समूह 'B' छ ।

प्रश्न अनुसार

$$n(U) = 3200$$
$$n(F) = 1800$$
$$n(B) = 2000$$
$$n(B \cap F) = 1200$$
$$n(\overline{B \cup F}) = ?$$

दिइएको जानकारीलाई भेन-चित्रमा प्रस्तुत गर्दा,



भेन-चित्रबाट

यहाँ, $n_o(B) = n(B) - n(B \cap F)$ $= 2000 - 1200$ $= 800$	$n_o(F) = n(F) - n(B \cap F)$ $= 1800 - 1200$ $= 600$
$n(\overline{B \cup F}) = n(U) - n(B \cup F)$ $= 3200 - (800 + 1200 + 600)$ $= 600$	

$\therefore$ भेन-चित्रबाटको जानकारी अनुसार 600 जनाले दिइएका मध्ये कुनै पनि खेल खेल्न मन नपराउने पाइयो ।

3. 80 जना विद्यार्थीहरु भएको एउटा कक्षामा 30 जनाले दाल मात्र मन पराए, 20 जनाले गुन्द्रुक मात्र मन पराए र 20 जनाले कुनै पनि मन पराएनन् भने

(i) माथिको तथ्यलाई भेन-चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ii) दुवै परिकार मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(iii) कम्तिमा एक प्रकारको परिकार मन पराउनेको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान:

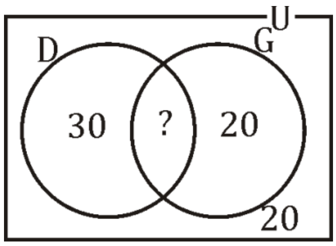
मानौं दाल मन पराउनेको समूह 'D' र गुन्द्रुक मन पराउनेको समूह 'G' छ । त्यस्तै कक्षामा भएका सबै विद्यार्थीहरुको समूह 'U' छ ।

प्रश्नअनुसार,

$n(U) = 80$, $n_o(D) = 30$, $n_o(G) = 20$, $n(\overline{G \cup D}) = 20$

$n(G \cap D) = ?$ $n(G \cup D) = ?$

(i) दिइएको तथ्यलाई भेन-चित्रमा प्रस्तुत गर्दा



(ii) भेन-चित्रबाट दुवै परिकार मन पराउने विद्यार्थी संख्या

$$n(D \cap G) = n(U) - \{n_0(D) + n_0(G) + n(\overline{G \cup D})\}$$
$$= 80 - [30 + 20 + 20]$$
$$= 80 - 70$$
$$= 10$$

$\therefore$ दुवै परिकार मन पराउनेको सङ्ख्या 10 छ ।

(iii) भेन चित्रबाट कम्तिमा एउटा परिकार मन पराउने विद्यार्थी संख्या

$$n(D \cup G) = n_o(D) + n_o(G) + n(D \cap G)$$
$$= 30 + 20 + 10$$
$$= 60$$

अर्को तरिकाबाट

$$n(D \cup G) = n(U) - n(\overline{D \cup G})$$
$$= 80 - 20$$
$$= 60$$

$\therefore$ त्यसैले कम्तिमा एक प्रकारको परिकार मन पराउनेको सङ्ख्या 60 छ ।

4. एउटा समूहमा गरिएको सर्वेक्षणमा 50% विद्यार्थीहरु बास्केटबल खेल्न मन पराउने पाइयो । 50% ले फुटबल खेल्न र 20% ले कुनै पनि खेल खेल्न मन नपराउने पाइयो । यदि 500 जनाले दुवै खेल खेलेको पाइयो भने

(i) माथिको तथ्यलाई भेन-चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ii) सर्वेक्षणमा भाग लिएका जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान,

मानौं, बास्केटबल मन पराउनेको समूह B र फुटबल खेल्न मन पराउनेको समूह F छ ।

प्रश्नअनुसार,

$n(U) = x$ मानौं

$n(B) = x$ को 50%

$= x \times \frac{50}{100} = \frac{x}{2}$

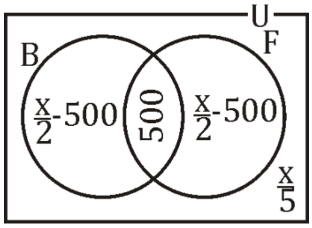
$n(F) = x$ को 50%

$= x \times \frac{50}{100} = \frac{x}{2}$

$n(B \cap F) = 500$

$n(\overline{B \cup F}) = x$ को 20%

$= x \times \frac{20}{100} = \frac{x}{5}$



दिइएको तथ्यलाई भेन-चित्रमा प्रस्तुत गर्दा,

यहाँ, भेन-चित्रबाट,

$n(\overline{B \cup F}) = n(U) - n(B \cup F)$

अथवा, $\frac{x}{5} = x - [\frac{x}{2} - 500 + \frac{x}{2} - 500 + 500]$

अथवा, $\frac{x}{5} = x - [x - 500]$ $[\because \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x]$

अथवा, $\frac{x}{5} = 500$

अथवा, $x = 2500$

$\therefore$ जम्मा विद्यार्थी संख्या 2500 छ ।

वैकल्पिक विधि

मानौं $n(U) = 100$

$n(B) = 50$

$n(F) = 50$

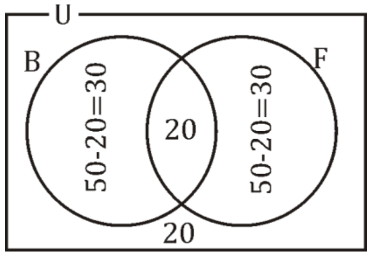
$n(\overline{B \cup F}) = 20$

$n(B \cup F) = n(U) - n(\overline{B \cup F})$

$= 100 - 20 = 80$

$n(B \cap F) = n(B) + n(F) - n(B \cup F)$

$= 50 + 50 - 80 = 20$



यहाँ जम्मा विद्यार्थीको 20% = 500

अथवा, $\frac{20}{100} \times$ जम्मा विद्यार्थी = 500

अथवा, जम्मा विद्यार्थी = 2500

5. कुनै भाषा परीक्षामा सम्मिलित 70 जना विद्यार्थीहरुमध्ये, 25 जना अङ्ग्रेजी भाषामा, 27 जना कोरियन भाषामा, 27 जना जापानी भाषामा उत्तिर्ण भएका थिए । यदि 11 जना अङ्ग्रेजी र कोरियन भाषामा, 14 जना कोरियन र जापानी भाषामा, 10 जना अङ्ग्रेजी र जापानी भाषामा तथा 6 जना तिनओटै भाषाहरुमा उत्तिर्ण भएका थिए भने
   (i) उक्त तथ्यलाई भेन-चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
   (ii) तिनओटै भाषाहरुमा अनुतिर्ण विद्यार्थीहरुको प्रतिशत पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, अङ्ग्रेजी, कोरियन र जापानी भाषामा उत्तिर्ण विद्यार्थीहरुको समूह क्रमशः E, K र J छ । त्यस्तै भाषा परीक्षामा सम्मिलित विद्यार्थीहरुको समूह U छ ।

प्रश्नअनुसारः

$n(U) = 70$, $n(E \cap K) = 11$

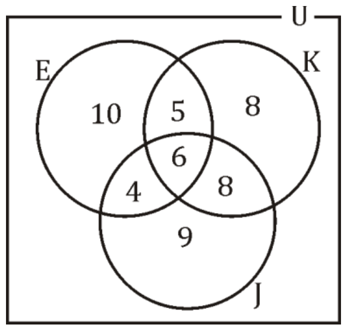
$n(E) = 25$, $n(K \cap J) = 14$

$n(K) = 27$, $n(E \cap J) = 10$

$n(J) = 27$, $n(E \cap K \cap J) = 6$

$n(\overline{E \cup K \cup J}) = ?$

(i) दिइएको जानकारीलाई भेन-चित्रमा प्रस्तुत गर्दा



$n_o(E \cap J) = n(E \cap J) - n(E \cap K \cap J)$
$= 10 - 6$
$= 4$

$n_o(K \cap J) = n(K \cap J) - n(E \cap K \cap J)$
$= 14 - 6$
$= 8$

$n_o(E \cap K) = n(E \cap K) - n(E \cap K \cap J)$

$= 11 - 6$

$= 5$

$n(E \cup K \cup J) = n(U) - n_o(E \cup K \cup J)$

$= 70 - 50$

$= 20$

$n_o(E) = n(E) - [n_o(E \cap K) + n_o(E \cap J) + n(E \cap K \cap J)]$

$= 25 - (5 + 4 + 6)$

$= 10$

$n_o(K) = n(K) - [n_o(E \cap K) + n_o(K \cap J) + n(E \cap K \cap J)]$

$= 27 - (5 + 8 + 6)$

$= 8$

$n_o(J) = n(J) - [n_o(E \cap J) + n_o(K \cap J) + n(E \cap K \cap J)]$

$= 27 - (4 + 8 + 6)$

$= 9$

भेन-चित्रबाट,

$n_o(E \cup K \cup J) = n_0(E) + n_o(K) + n_o(J) + n_o(E \cap J) + n_o(E \cap K) + n_o(J \cap K) + n_o(E \cap J \cap K)$

$= (10 + 5) + (4 + 6) + (8 + 8) + 9$

$= (15 + 10) + (16 + 9)$

$= 25 + 25$

$= 50$

अतः सबै विषयहरूमा अनुत्तीर्ण विद्यार्थी सङ्ख्या $= n(U) - n_0(E \cup K \cup J)$

$= 70 - 50$

$= 20$

(ii) त्यसैले, तिनओटै भाषा परिक्षामा,

अनुतिर्ण प्रतिशत $= \dfrac{\text{अनुतिर्ण सङ्ख्या}}{\text{जम्मा सम्मिलित सङख्या}} \times 100\%$

$= \frac{20}{70} \times 100\%$

$= \frac{200}{7}\%$

$= 28\frac{4}{7}\%$

अभ्यास

1\. (क) कुनै एउटा सर्वेक्षणमा सम्मिलितहरुमध्ये 100 जनाले काउली मात्र, 120 जनाले आलु मात्र र 200 जनाले काउली र आलु दुवै खान मन पराउने भेट्टाइयो । भेन-चित्रको माध्यमबाट दुईओटा मध्ये कम्तिमा एउटा खान मन पराउनेको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) 800 जना मानिसमध्ये 400 जनाले नेपाली मात्र बोल्छन्, 130 जनाले नेवारी मात्र बोल्न सक्छन् र 50 जनाले दुवै भाषा बोल्न सक्छन् । भेन-चित्रको माध्यमबाट दुइओटा मध्ये कम्तिमा एउटा भाषा बोल्न सक्नेको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

2\. (क) एउटा वनभोजमा सामेल भएका 100 जना सहभागीमध्ये 70 जनाले दूध, 40 जनाले सुप र 20 जनाले दुवै थोक खाएछन् भने

(i) उक्त तथ्यलाई भेन-चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ii) दुवै थोक नखानेको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) 1200 जनाको सर्वेक्षणमा 300 जनाले हिउँदे मौसम, 400 जनाले वर्षे मौसम र 200 जनाले दुवै मौसम मन पराउने भेट्टाइयो । भेन-चित्रको माध्यमबाट कुनै पनि मौसम मन नपराउनेको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

3\. (क) खेलप्रेमी 200 जना व्यक्तिहरुमा गरिएको सर्वेक्षणमा फुटबल खेल मन पराउने 130, क्रिकेट खेल मन पराउने 90 जना र दुवै खेल मन नपराउने 20 जना पाइयो भने

(i) दुवै खेल मन पराउने कति थिए ?

(ii) उक्त तथ्यलाई भेन-चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) 40 जना खेलाडीहरुमा गरिएको सर्वेक्षणमा जुडो खेल मन पराउने 20, कराँते खेल मन पराउने 30 जना र दुवै खेल मन नपराउने 5 जना पाइयो भने

(i) दुवै खेल मन पराउने कति थिए ?

(ii) उक्त तथ्यलाई भेन-चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

4\. (क) कक्षा 10 का 40 जना विद्यार्थीहरुलाई दूध अथवा दही कुन मनपर्छ भनि सोधिएको प्रश्नमा 30 जनाले दही र 25 जनाले दूध मन पर्ने बताए । यदि ति मध्ये 5 जनाले दूध अथवा दही कुनै पनि मन पर्दैन भन्ने बताए भने भेन-चित्र बनाई पत्ता लगाउनुहोस् ।

(i) दूध मात्र मन पराउने,

(ii) दही मात्र मन पराउने,

(iii) दूध अथवा दही कुनै एकमात्र मन पराउने

(ख) एउटा प्रवेश परिक्षामा 2000 जना विद्यार्थीहरु सम्मिलित थिए । उनिहरु मध्ये 1500

जनाले गणितमा A+ ग्रेड प्राप्त गरे । 800 जनाले अङ्ग्रेजीमा A+ ग्रेड प्राप्त गरे । यदि A+ ग्रेड नल्याउने कोही पनि थिएनन् भने

(i) कति जनाले अङ्ग्रेजीमा मात्र A+ ग्रेड प्राप्त गरे ?

(ii) कति जनाले गणितमा मात्र A+ ग्रेड प्राप्त गरे ?

(iii) प्राप्त नतिजालाई भेन-चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ?

5. (क) यदि एउटा विद्यालयको छात्रवासका सबै विद्यार्थीहरु चिया वा कफि दुवै पिउँदछन् । यदि 72% ले चिया र 48% ले कफि पिउँदछन् भने कति प्रतिशत विद्यार्थीले

(i) चिया र कफी पिउँदछन्,

(ii) चिया मात्रै पिउँदछन्,

(iii) कफि मात्रै पिउँदछन् ?

(ख) कुनै परीक्षामा सम्मिलित भएका परीक्षार्थीहरु मध्ये 80% अङ्ग्रेजीमा, 85% विज्ञानमा र 75% अङ्ग्रेजी र विज्ञान दुवैमा B+ ग्रेड ल्याउन सफल भएछन् । यदि दुवै विषयहरुमा 45 जनाले B+ ग्रेड ल्याउन असफल भएछन् भने जम्मा परीक्षार्थीहरुको सङ्ख्या कति होला ? प्राप्त तथ्यलाई भेन-चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उदाहरण : 6

एउटा सर्वेक्षणमा, 65 जनाले फुटबल, 75 जनाले क्रिकेट, 75 जनाले डण्डिबियो, 23 जनाले डण्डिबियो मात्र, 19 जनाले फुटबल र डण्डिबियो मात्र, 17 जनाले क्रिकेट र डण्डिबियो मात्र, 28 जनाले क्रिकेट र फुटबल मन पराउँछन् भने

(i) तिनओटै खेलहरु मन पराउनेको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ii) क्रिकेटमात्र मन पराउनेको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधानः

मानौं, फुटबल, क्रिकेट र डण्डिबियो खेल्नेहरुको समूह क्रमशः F, C र D छ । त्यस्तै सर्वेक्षणमा भाग लिएकाहरुको समूह U छ ।

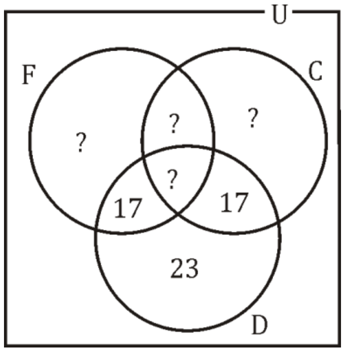
प्रश्न अनुसार,

$n(F) = 65, n_o(D) = 23, n(F \cap C) = 28$

$n(C) = 75, n_o(F \cap D) = 19, n(F \cap C \cap D) = ?$

$n(D) = 75, n_o(C \cap D) = 17, n_o(C) = ?$

दिइएको जानकारीलाई भेन-चित्रमा प्रस्तुत गर्दा



भेन-चित्रमा भर्दाका अवस्थाहरू

i) तीनवटै मन पराउने संख्या

$n(F\cap C\cap D) = n(D) - [n_o(F\cap D) + n_o(D) + n_o(C\cap D)]$
$= 75 - (19 + 23 + 17)$
$= 75 - 59$
$= 16$

ii) $n_o(F\cap C) = n(F\cap C) - n(F\cap C\cap D)$
$= 28 - 16$
$= 12$

iii) $n_o(C) = n(C) - (12 + 16 + 17)$
$= 75 - 45$
$= 30$

$\therefore$ 30 जनाले मात्र क्रिकेट खेल्न मन पराउँछन् ।

अभ्यास : 6

6. (क) अन्तर्राष्ट्रिय क्षयरोग दिवसका दिन एउटा संस्थाले क्षयरोगका सम्बन्धमा जनताहरु कति सचेत छन् भन्ने बारे अनुसन्धान गर्न केही बटुवालाई क्षयरोग (Tuberculosis) के कारणले लाग्छ भनि सोधिएको प्रश्नको उत्तरमा 110 जनाले मादक पदार्थ सेवनबाट, 75 जनाले धुम्रपान गर्नाले र 60 जनाले खानाको कारणले लाग्छ भने । ती मध्ये 25 जनाले मादक पदार्थ र धुम्रपान दुवै कारणले, 10 जनाले धुम्रपान र खानाले, 10 जनाले मादक पदार्थ र खानाले र 5 जनाले यी तिनओटै कारणहरु उल्लेख गरे भने

(i) जम्मा कति बटुवाहरुलाई प्रश्न गरिएको रहेछ ? भेन-चित्र बनाइ हल गर्नुहोस् ।

(ii) मादकपदार्थको सेवनबाट मात्र भन्नेहरुको सङ्ख्या कति छ ?

(ख) केही मानिसहरुलाई उनीहरुले कुन भाषाको चलचित्र मन पराउँछन् भन्ने विषयमा सर्वेक्षण गर्दा 48 जनाले नेपाली, 30 जनाले हिन्दी, 28 जनाले अङ्ग्रेजी, 19 जनाले नेपाली र हिन्दी, 15 जनाले अङ्ग्रेजी र हिन्दी, 14 जनाले अङ्ग्रेजी र नेपाली तथा 10 जनाले तिनओटै भाषाको चलचित्र हेनमन पराउने पाइयो भने

(i) जम्मा कति मानिसहरुबीच सर्वेक्षण गरिएको थियो ?

(ii) हिन्दी चलचित्र मात्र कति जनाले मन पराउँदा रहेछन् ?

(iii) नेपाली अथवा हिन्दी कुनै चलचित्र मन नपराउने कति जना रहेछन् ?

7. विद्यार्थीहरुको एउटा समूहमा 30 जना गणित पढछन्, 24 जना अर्थशास्त्र पढछन्, 22 जना तथ्याङ्कशास्त्र पढछन्, 8 जना अर्थशास्त्र मात्र पढछन्, 6 जना गणित र तथ्याङ्कशास्त्र मात्र पढछन्, 2 जना गणित र अर्थशास्त्र मात्र पढछन् र 8 जना कुनै पनि विषय पढदैनन् ।

(i) त्यस समूहमा जम्मा कति विद्यार्थी छन् ?

(ii) कति जनाले अर्थशास्त्र र तथ्याङ्कशास्त्र मात्र पढछन् ?

(iii) कति जनाले तथ्याङ्कशास्त्र मात्र पढछन् ?

(iv) कति जनाले तिनओटै विषयमात्र पढछन् ?

8. एउटा टेलिभिजनको सर्वेक्षणमा निम्नलिखित तथ्याङ्क फेला पऱ्यो । 60% दर्शकले कार्यक्रम A, 50% ले कार्यक्रम B, 50% ले कार्यक्रम C, 30% ले कार्यक्रम A र B, 20% ले कार्यक्रम B र C, 30% ले कार्यक्रम A र C हेर्दछन् । 10% ले यी कुनै पनि कार्यक्रम हेर्दैनन् । भेन-चित्र प्रयोग गरी निम्नलिखित कुराहरु पत्ता लगाउनुहोस् ।

(i) कति प्रतिशत दर्शकले A, B र C कार्यक्रम हेर्दछन् ?

(ii) कति प्रतिशतले दुई कार्यक्रम मात्र हेर्दछन् ?

(iii) कति प्रतिशतले A मात्र हेर्दछन् ?

9. एउटा सर्वेक्षणमा आधुनिक गीत र लोकगीत मन पराउने मानिसहरुको सङ्ख्या 8:9 पाइयो जसमध्ये 50 जनाले दुवै गीत मन पराए र 40 जनाले लोकगीत मात्र मन पराए । 80 जनाले कुनै गीत मन पराएनन् भने

(i) उक्त तथ्यलाई भेन-चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ii) सर्वेक्षणमा भाग लिने मानिसहरुको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. पृष्ठपोषण

1. (क) काउली मन पराउनेको समूलाई C र आलु मन पराउनेको समूहलाई P मान्नुहोस् । उदाहरण १ मा दिइएजस्तै गरि हल गर्नुहोस् । [उत्तर 420]

(ख) १(क) जस्तै गरी हल गर्नुहोस् । [उत्तर 580]

2. (क) D र S क्रमश दूध र सुप मन पराउनेको समूह मान्नुहोस् । उदाहरण २ मा दिइएजस्तै गरी हल गर्नुहोस् । [$n(\overline{D \cup S}) = 10$]

(ख) W र S लाई क्रमश हिउँदे (Winter) र गर्मी (Summer) season मन पराउने समूह मान्नुहोस् । २(क) जस्तै गरी हल गर्नुहोस् ।[उत्तरः $700 = n(\overline{W \cup S})$]

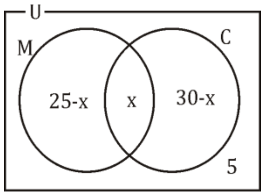
3. (क) $n(F \cup C) = 200 - 20 = 180$ (जहाँ F र C ले क्रमशः फुटबल र क्रिकेट खेल्नेको समूहलाई जनाउँछन् ।

$n(F \cup C) = n(F) + n(C) - n(F \cap C)$ सूत्र प्रयोग गरी $n(F \cap C)$ पत्ता लगाउनुहोस् । अन्तमा भेन-चित्र खिच्नुहोस् । [उत्तरः $n(F \cap C) = 40$]

(ख) ३(क) जस्तै गरी समाधान गर्नुहोस् ।

(J र K क्रमशः जुडो र कराँते खेल्नेको समूह मान्नुहोस् ।) [उत्तरः $n(J \cap K) = 15$]

4. (क) दूध मन पराउनेको समूहलाई 'M' र दही मन पराउनेको समूहलाई C गर्नुहोस् ।



भेन-चित्रमा $n(M \cap C)$ को मान x, मानी $25 - x + x + 30 - x + 5 = 40$ मान्नुहोस् ।

[उत्तरः $n_o(M) = 5, n_o(C) = 10, n(M \cup C) = 35$]

(ख) ४(क) जस्तै गरी समाधान गर्नुहोस् । [उत्तरः (i) 500 (ii) 1200]

5. (क) चिया पिउनेको समूहलाई 'T' र कफि पिउनेको समूहलाई 'C' मान्नुहोस् ।

$n(T \cup C) = n(T) + n(C) - n(T \cap C)$ मा $100 = 72 + 48 - n(T \cap C)$ सूत्र प्रयोग गर्नुहोस् । [उत्तरः (i) 20% (ii) 52% (iii) 28%]

(ख) E र S क्रमशः अङ्ग्रेजी र विज्ञानमा B+ ल्याउनेको समूह मान्नुहोस् ।

$n(E \cup S) = 80 + 85 - 75 = 90$
$n(\overline{E \cup S}) = 100 - 90 = 10$
जम्मा विद्यार्थी $10\% = 45$

अथवा, जम्मा विद्यार्थी $= 450$ [उत्तरः 450]

6. (क) मादक पदार्थ, धुम्रपान र खानाको कारणले क्षयरोग हुनेको समूहलाई क्रमशः A, S र D मान्नुहोस् । उदाहरण ५ मा दिइए जस्तै गरी भेन-चित्रमा जानकारीहरु प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

[(i) $n(A \cup S \cup D) = 205$, (ii) $n_o(A) = 80$]

(ख) ६.(क) जस्तै गरी हल गर्नुहोस् । [उत्तरः (i) 68, (ii) 6, (iii) 9]

7. M, E र S लाई गणित, अर्थशास्त्र र तथ्याङ्कशास्त्र पढ्नेको समूहलाई जनाउनुहोस् । सबै जानकारीहरुलाई भेन-चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । [उत्तरः (i) 54, (ii) 6, (iii) 2, (iv) 8]

8. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ सूत्र प्रयोग गरी $100 - 10 = 60 + 50 + 50 - 30 - 30 - 20 + n(A \cap B \cap C)$. 10 जना कुनै पनि नहेर्ने $n(A \cap B \cap C)$ पत्ता लगाउनुहोस् । भेन चित्रमा जानकारी भरी बाँकी प्रश्नहरु गर्नुहोस् ।

[उत्तरः (i) 10%, (ii) 20%, (iii) 10%]

9. M र F लाई क्रमशः आधुनिक गित र लोकगीत मन पराउनेको समूह मान्नुहोस् । $n(M) = 8K, n(F) = 9K$ जहाँ K अनुपातिक सङ्ख्या हो ।

[उत्तरः $9K - 50 = 40$ बाट $K = 10$ हुन्छ ।, (ii) 200]

6. **सारांशः**

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

(i) यस पाठसँग सम्बन्धित कक्षा १० को पाठ्यपुस्तकमा दिइएका उदाहरणहरु अध्ययन गर्नुहोस् ।

(ii) समस्यालाई भेन-चित्र प्रयोग गरी समस्या समाधान गर्ने प्रयास गर्नुहोस् ।

(iii) समस्या समाधान गर्दा प्रश्नलाई दुई तिन पटक पढी दिइएका कुरा पत्ता लगाई, निकाल्नु पर्ने कुराको बारेमा स्पष्ट हुनुहोस् ।

एकाइ : 2

कर र मुद्रा विनिमय (Tax and Money Exchange)

1. **परिचय** :

यस एकाइमा कर र मुद्रा विनिमय सम्बन्धी पाठ्यवस्तु प्रस्तुत गर्ने प्रयास गरिएको छ । जस अन्तर्गत अति छोटो उत्तर आउने (ज्ञानसँग सम्बन्धित), छोटो उत्तर आउने (बोधसँग सम्बन्धित), लामो उत्तर आउने (प्रयोग र उच्च दक्षतासँग सम्बन्धित) प्रश्नहरुको समाधान सहित चर्चा गरिएको छ ।

2. **सिकाई उपलब्धि** :

यस एकाइको अध्ययनपछि निम्न लिखित सिकाइ उपलब्धि हासिल हुनेछ ।

"दैनिक जीवनका मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) र मुद्राविनिमयका समस्याहरु सङ्कलन र हल गर्न ।"

3. **आधारभूत विषयवस्तु**:

उल्लेखित सिकाइ उपलब्धि हाँसिल गर्न मुख्य विषयवस्तुमा प्रवेश गर्नु पूर्व निम्न लिखित आधारभूत विषयवस्तुका बारेमा जानकारी राख्नु आवश्यक छ ।

ऐकिक नियमः एकाइ मूल्यको जानकारी पछि त्यसको आधारमा धेरै वस्तुको मूल्य पत्ता लगाउने विधिलाई ऐकिक नियम भन्दछन् । जस्तै : 1 ओटा कलशको मूल्य रु. 50 भए 10 ओटा कलशको मूल्य रु. $10 \times 50 =$ रु. 500 हुन्छ ।

प्रतिशतः प्रतिशत भनेको भिन्न हो जसको हर 100 हुन्छ अथवा 100 मा कति भन्ने अर्थ प्रतिशतले दिन्छ ।

जस्तै : $20\% = \frac{20}{100}$

नाफा र नोक्सानः कुनै पनि वस्तुको क्रय मूल्य (CP) र विक्रयमूल्य (SP) को फरक नाफा वा नोक्सान हुन्छ ।

नाफा = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

नोक्सान = क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य

छुट (Discount): अङ्कित मूल्य (MP) मा केही रकम कम गरेर कुनै सामान बेचिन्छ भने त्यो कम गरिएको रकमलाई छुट भनिन्छ ।

4. **मुख्य विषयवस्तु** :

मूल्य अभिवृद्धि कर (Value Added Tax):

कुनै वस्तु वा सेवाको आपुर्ति गर्दा लाग्ने करलाई मूल्य अभिवृद्धी कर (Value Added Tax)

अथवा छोटकरीमा "VAT" भनिन्छ । कुनै पनि सामानको मूल्य कायम गर्दा मूल्यमा नाफा समेत जोडी छुट घटाएर आउने मूल्यमा "VAT" लाग्ने गर्दछ । उत्पादक, थोक विक्रेता, खुद्राविक्रेता र ग्राहक सबैले एउटै सामानमा फरक-फरक रकम "VAT" बापत सरकारलाई तिर्ने गर्छन् । (ग्राहकले तिर्ने रकम अन्तमा गणना गरिन्छ, जुन उत्पादक, थोक विक्रेता र खुद्रा विक्रेताले तिरेको रकमको योगफलसँग बराबर हुन्छ ।) तल दिइएको तालिकालाई अध्ययन गरौं ।

(हाल नेपालमा VAT को रकम 13% प्रतिशतको दरले छ । फरक-फरक देशमा यसको दर पनि फरक-फरक हुन्छ ।)

उत्पादन र वितरणको तह	**कुनै निश्चित सामानको विक्री मूल्य**	**विक्रीमा लाग्ने जम्मा कर** (Output Tax)	**पहिले नै तिरिसकेको कर रकम** (Input Tax)	**सरकारलाई तिर्नुपर्ने VAT बापतको रकम** (Output TAX - Input TAX)
उत्पादक (Produce of Manufacture)	रु. 20000 (मानौं)	रु. 20000 को 13% $= रु.\ 20000 \times \frac{13}{100}$ = रु. 2600	—	रु. 2600
थोक विक्रेता (Wholeseller of Dealer)	रु. 30000 (मानौं)	रु. 30000 को 13% $= रु.\ 30000 \times \frac{13}{100}$ = रु. 3900	रु. 2600 (उत्पादकले बनाएको बिलमा)	रु. 1300
खुद्रा व्यापारी (Retailer)	रु. 40000 (मानौं)	रु. 40000 को 13% $= रु.\ 40000 \times \frac{13}{100}$ = रु. 5200	रु. 3900 (थोक विक्रेताले बनाएको बिलमा)	रु. 1300
जम्मा "VAT"				रु. 5200

ग्राहकले सामान किन्ने बेला तिरेको "VAT" रकम रु. 4000 को 13%

$$= रु.\ 4000 \times \frac{13}{100}$$

= रु. 5200 (उक्त रकम उत्पादक, थोक विक्रेता र खुद्रा व्यापारी तिनै थरि मिलेर सरकारलाई तिरिसकेका हुन्छन् ।)

$$\text{VAT प्रतिशत (VAT\%)} = \frac{\text{VAT रकम}}{\text{विक्रय मूल्य}} \times 100$$

VAT रकम = VAT सहितको वि.मु - वि.मु.

मुद्रा विनिमय (Money Exchange)

एक देशको मुद्राको विनिमय अर्को देशको मुद्रासँग गरिने दरलाई मुद्रा विनिमय दर (Rate of Exchange) भनिन्छ । तल दिइएको तालिकाको अध्ययन गर्नुहोस् ।

नेपाल राष्ट्र बैङ्क

केन्द्रीय कार्यालय, विदेशी विनिमय व्यवस्थापन विभाग

नेपाल राष्ट्र बैङ्कले तोकेको विनिमय दर

२०७३ साल पुस २४ गते (जनवरी ८, २०१७) आइतवारको विनिमय दर

मुद्रा	एकाइ	खरिद दर	बिक्री दर
भारतीय रुपियाँ	१०० को	रु. १६०।००	रु. १६०।१५

खुला बजार विनिमय दर (नेपाल राष्ट्र बैङ्कको प्रयोजनका लागि)

मुद्रा	एकाइ	खरिद दर	बिक्री दर
अमेरिकी डलर	१ को	रु. १०८।४३	रु. १०९।०३
युरो	१ को	रु. ११४।९२	रु. ११५।५६
स्वीस फ्रैङ्क	१ को	रु. १०७।२५	रु. १०७।८५
अस्ट्रेलियन डलर	१ को	रु. ७९।५८	रु. ८०।०२
क्यानेडियन डलर	१ को	रु. ८१।८२	रु. ८२।२८
सिङ्गापुर डलर	१ को	रु. ७५।६३	रु. ७६।०५
जापानी येन	१० को	रु. ९।३५	रु. ९।४०
चिनियाँ युआन	१ को	रु.१५।६५	रु. १५।७४
साउदी अरब रियाल	१ को	रु. २८।९१	रु. २९।०७
कतारी रियाल	१ को	रु. २९।७८	रु. २९।९५
थाई भाट	१ को	रु. ३।०४	रु. ३।०५
संयुक्त अरब इमिरेट दिराम	१ को	रु. २९।५२	रु. २९।६८
मलेसियन रिङ्गिट	१ को	रु. २४।२४	रु. २४।३७
दक्षिण कोरियन वन	१०० को	रु. ९।०९	रु. ९।१४
स्विडिस क्रोनर	१ को	रु. १२।०२	रु. १२।०८
डेनिस क्रोनर	१ को	रु. १५।४६	रु.१५।५४
हङकङ डलर	१ को	रु. १३।९८	रु. १४।०६
कुवेती दिनार	१ को	रु. ३५४।७५	रु. ३५६।७१
बहराइन दिनार	१ को	रु. २८७।५७	रु. २८९।१६

नोटः यो विनिमय दरलाई बैङ्कले आवश्यकता अनुसार जुनसुकै समयमा पनि संशोधन गर्न सक्नेछ । वाणिज्य बैङ्कहरूले तोक्ने दर भने फरक हुन सक्नेछ ।

अद्यावधिक विनिमय दर बैङ्कको वेबसाइट www.nrb.org.np मा उपलब्ध हुनेछ ।

उदाहरण : 1

एउटा आइरनको मूल्य रु. 2400 छ । 13% VAT जोडी विक्री गर्दा (i) VAT बापत कति रकम तिर्नुपर्छ ? आइरनको मूल्य VAT सहित कति पर्छ ?

समाधान

यहाँ VAT पहिलेको मूल्य (वि.मू.) = रु. 2400

VAT % = 13%

VAT रकम = ?

VAT सहितको वि.मू. = ?

हामीलाई थाहा छ,

(i) VAT रकम = वि.मू. × VAT%

= रु. 2400 को 13%

= रु. $2400 \times \frac{13}{100}$

= रु. 312

(ii) VAT सहितको वि.मु. = VAT रकम + वि.मू.

= रु. 312 + रु. 2400

= रु. 2712

अभ्यास : 1

1. यदि VAT% = x, VAT रकम = y र वि.मू. = z भए x, y र z को सम्बन्ध के हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।
2. VAT रकम, VAT सहितको विक्रिमूल्य (वि.मू.) र विक्री मूल्य (वि.मू.) लाई समेट्ने सूत्र लेख्नुहोस् ।
3. एउटा रेडियोको विक्री मूल्य (वि.मू.) रु. 5000 छ । 13% VAT (भ्याट) जोड्दा (i) VAT बापत कति रकम तिनुपर्छ ? (ii) VAT सहितको वि.मू. कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. एउटा सामानको VAT सहितको वि.मू. रु. 2720 र VAT बापतको रकम रु. 425 भए विक्री मूल्य (वि.मू.) कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण : 2

एउटा सामानको VAT सहितको विक्री मूल्य रु. 2300 र वि.मू. रु. 2000 भए VAT% कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधानः

यहाँ, VAT सहितको विक्रीमूल्य (वि.मू.) = रु. 2300

वि.मू. = रु. 2000

VAT% = ?

हामीलाई थाहा छ,

VAT रकम = VAT सहितको वि.मू. − वि.मू.

= रु. 2300 – रु. 2000

= रु. 300

फेरि,

$$\text{VAT\%} = \frac{\text{VAT रकम}}{\text{वि.मू.}} \times 100$$

$$= \frac{300}{2000} \times 100$$

$$= 15\%$$

अभ्यास : 2

1. एउटा लुगा धुने मेसिनको वि.यु. रु. 30000 र VAT सहित वि.मू. रु. 33000 पर्छ । VAT% पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. एउटा हिटर ग्यासको वि.मु. र VAT सहितको वि.मू. क्रमशः रु. 7500 र रु. 8475 पर्छ । VAT% पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. एउटा लुगा सिउने मेसिनको VAT सहितको वि.मू. रु. 6900 र VAT बापतको रकम रु. 900 छ । VAT% प्रतिशत पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण : 3

एउटा मोबाइल सेटको अङ्कित मूल्य रु. 7000 छ । उक्त मोबाइल सेटमा 15% छुट दिई 13% VAT लगाउँदा सो मोबाइलको मूल्य कति कायम भयो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधानः

यहाँ, अङ्कित मूल्य (MP) = रु. 7000

छुट प्रतिशत (discount rate) = 15%

VAT प्रतिशत (VAT%) = 13%

भ्याट (VAT) सहितको बि.मू. = ?

हामीलाई थाहा छ,

छुट रकम = रु. 7000 को 15%

$= \text{रु. } 7000 \times \frac{15}{100}$

= रु. 1050

वि.मु. = अङ्कित मूल्य – छुट रकम

= रु. 7000 – रु. 1050

= रु. 5950

फेरि, VAT रकम = वि.मू. को 13%

$= \text{रु. } 5950 \times \frac{13}{100}$

= रु. 773.50

तसर्थ, VAT सहितको बि.मु. = VAT रकम + वि.मु.

= रु. 773.50 + रु. 5950

= रु. 6723.50

अभ्यास : 3

1. एउटा घडिको अङ्कित मूल्य रु. 5000 छ । उक्त घडीमा 12% छुट दिई 13% VAT लगाउदा सो घडीको मूल्य कति कायम भयो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. एउटा क्यामेराको अङिकत मूल्य रु. 10000 छ । यसलाई पसलेले 8% छुट दिएपछि मूल्यमा 10% भ्याट (VAT) लगाई दिन्छ भने उक्त क्यामेरालाई ग्राहकले किन्न कति तिर्नु पर्ला ?
3. एक सेट कम्प्युटरको अङ्कित मूल्य रु. 40000 राखिएको थियो । सो कम्प्युटरमा 10% छुट दिई 13% भ्याट (VAT) लगाउँदा सो कम्प्युटरको मूल्य कति पर्ला ? पत्ता लगाउनुहोस्

उदाहरण : 4

एउटा सामानको अङ्कित मूल्यमा 18% छुट दिई 13% भ्याट (VAT) जोडेर रु. 12045.80 मा विक्री गरियो । छुट रकम र भ्याट रकम कति/कति रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधानः

मानौं, अङ्कित मूल्य x रुपैंया छ ।

18% छुट दिदा, छुट रकम = x को 18%

$= x \times \frac{18}{100} = \frac{18x}{100}$

वि.मू. = अङ्कित मूल्य – छुट रकम

$= x - \frac{18x}{100} \qquad = \frac{100x - 18x}{100} \qquad = \frac{82x}{100}$

फेरि, भ्याट (VAT) रकम $= \frac{82x}{100}$ को 13%

$= \frac{82x}{100} \times \frac{13}{100} \qquad = \frac{1066x}{10000}$

VAT सहितको वि.मू. = भ्याट (VAT) रकम ˙ वि.मू.

$= \frac{1066x}{10000} + \frac{82x}{100}$

$= \frac{1066x + 82000}{10000} \qquad = \frac{9266x}{10000}$

प्रश्न अनुसार, $\frac{9266x}{10000} = 12045.80$

अथवा, $9266x = 12045.80 \times 10000$

अथवा, $x = \frac{120458000}{9266} \qquad = 13000$

∴ छुट रकम $= \frac{18x}{100}$

$= \frac{18x \times 1300}{100} \qquad =$ रु. 2340

भ्याट रकम $= \frac{1066x}{10000}$

$= \frac{1066 \times 13000}{10000} \qquad =$ रु. 1385.80

अभ्यास : 4

1. एउटा घडीको अङ्कित मूल्यमा 10% छुट दिई 15% भ्याट जोड्दा उक्त घडीको मूल्य रु. 4140 हुन्छ । छुट रकम र भ्याट रकम पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. एउटा सामानको अङ्कित मूल्यमा 15% छुट दिई 10% भ्याट जोडेर बेचियो । यदि छुट रकम रु. 2025 भए अङ्कित मूल्य र भ्याट रकम पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. एउटा घडी अङ्कित मूल्यमा रु. 255 छुट दिई 15% भ्याट जोडेर बेचियो । यदि भ्याट रकम रु. 450 थियो भने घडीको अङ्कित मूल्य र छुट प्रतिशत पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. एउटा काठको कलात्मक झ्यालको 15% छुट सहितको मूल्यमा 10% मूल्य अभिवृद्धिकर जोडेर एउटा पर्यटकले रु. 5610 तिऱ्यो भने उक्त झ्यालको अङ्कित मूल्य कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस्

उदाहरण : 5

माथि दिइएको बिक्री दर अनुसार 1 अमेरिकन डलर = ने.रु. 109.03, 10 जापानी येन = ने.रु. 9.40 र 1 कतारी रियाल = ने.रु.29.07 भए तल दिइएका मुद्रालाई नेपाली रुपियाँ (ने.रु.)मा बदल्नुहोस् ।

(क) 7000 अमेरिकन डलर (ख) 10000 जापानी येन (ग) 12000 कतारी रियाल

समाधानः

यहाँ,

(क) 1 अमेरिकन डलर = ने.रु. 109.03

7000 अमेरिकन डलर = ने.रु. 109.03×7000

= ने.रु. 763210

(ख) 10 जापानी येन = ने.रु. 9.40

1 जापानी येन = ने.रु. $\frac{9.40}{10}$

10000 जापानी येन = ने.रु. $\frac{9.40}{10} \times 10000$

= ने.रु. 9400

(ग) 1 कतारी रियाल = ने.रु. 29.07

12000 कतारी रियाल = ने.रु. 29.07×12000

= ने.रु. 348840

अभ्यास : 5

1. माथिल्लो पृष्ठमा दिइएको तालिकाबाट खरिद दर प्रयोग गरी नेपाली रुपियाँमा बदल्नुहोस् ।

(क) 12000 भारतीय रुपियाँ (ख) 25000 युरो (ग) 15000 जापानी येन

(घ) 28000 साउदीअरब रियाल (ङ) 3000 सिङ्गापुर डलर (च) 17000 चिनियाँ युआन

उदाहरण : 6

यदि भा.रु. 100 = ने.रु. 160 भए 48000 ने.रु.सँग कति भारु साँट्न सकिन्छ ।

समाधानः

यहाँ, ने.रु. 160 = भा.रु. 100

ने.रु. 1 = भा.रु. $\frac{100}{160}$

ने.रु. $48000 = \frac{100}{160} \times$ भा.रु. 48000

$= 90000$ भा.रु.

त्यसैले, ने.रु. 48000 सँग भा.रु. 90000 साँट्न सकिन्छ ।

अभ्यास : 6

1. यदि ने.रु. 108.43 अभ्यास = 1 अमेरिकन डलर भए ने.रु. 216860 लाई अमेरिकन डलरमा बदल्नुहोस् ।
2. यदि ने.रु. 354.75 = 1 कुवेति दिनार भए ने.रु. 1064250 सँग कति कुवेति दिनार साट्न सकिन्छ ?
3. यदि ने.रु. 15.65 = 1 चिनियाँ युआन भए ने.रु. 62600 सँग कति चिनियाँ युआन साँट्न सकिन्छ ।

उदाहरण : 7

यदि ने.रु. 3200 सँग भा.रु. 2000 तथा 75000 अमेरिकन डलरसँग भा.रु. 6750000 साँट्न सकिन्छ भने ने.रु. 64000 सँग कति अमेरिकन डलर साँट्न सकिन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, 3200 ने.रु. $= 2000$ भा.रु.

1 ने.रु. $= \frac{2000}{3200}$ भा.रु.

64000 ने.रु. $= \frac{2000}{3200} \times 64000$ भा.रु.

$= 40000$ भा.रु.

फेरि, 6750000 भा.रु. $= 7500$ अमेरिकन डलर

1 भा.रु. $= \frac{75000}{6750000}$ अमेरिकन डलर

40000 भा.रु. $= \frac{75000}{6750000} \times 40000$ अमेरिकन डलर

$= 444.44$ अमेरिकन डलर

त्यसैले, 64000 ने.रु.सँग 444.44 अमेरिकन डलर साट्न सकिनछ ।

वैकल्पिक विधि

मानौँ, x अमेरिकन डलर $=$ ने.रु. 64000

ने.रु. 3200 $=$ भा.रु. 2000

भा.रु. 6750000 $= 75000$ अमेरिकन डलर

$x \times 3200 \times 6750000 = 64000 \times 2000 \times 75000$

अथवा, $x = \frac{64000 \times 2000 \times 75000}{3200 \times 6750000}$

$= 444.44$

$\therefore$ ने.रु. 64000 सँग 444.44 अमेरिकन डलर साट्न सकिन्छ ।

अभ्यास : 7

1. यदि 1.05 अमेरिकन डलर $= 1$ युरो र भा.रु.71.85 $= 1$ युरो भए 7500 अमेरिकन डलरसँग कति भा.रु. साट्न सकिन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. यदि भा.रु. 839125 $=$ 10000 पाउण्ड स्टर्लिङ र 1 पाउण्ड स्टर्लिङ $=$ 8.60 चिनियाँ युआन भए 5000 चिनियाँ युआनसँग कति भा.रु. साट्न सकिनछ ?
3. यदि ने.रु. 7958 $=$ 100 अस्ट्रेलियन डलर र 85.10 जापानी येन $=$ 1 अस्ट्रेलियन डलर भए 382950 जापानी येनसँग कति ने.रु. साट्न सकिन्छ ?

5. **पृष्ठपोषण**

उदाहरण 1 सँग सम्बन्धित अभ्यास

(1) $y = \frac{x3}{100} \times 100$ (2) VAT सहितको वि.मु. $=$ VAT रकम $+$ अं.मू.

(3) (i) VAT वापतको रकम $= ? = 650$ (ii) VAT सहितको वि.मु.$=$ रु. 5000+रु.50=रु.5650

(4) अं.मु. $=$ रु. 2720 - रु. 425 $=$ रु. 2295

उदाहरण 2 सँग सम्बन्धित अभ्यास

(1) $\text{VAT\%} = \frac{\text{रु. } 300}{\text{रु. } 3000} \times 100\% = 10\%$ (2) $\text{VAT\%} = \frac{\text{रु. } 975}{\text{रु. } 7500} \times 100\% = 13\%$

(3) $\text{VAT\%} = \frac{\text{रु. } 900}{\text{रु. } 6000} \times 100\% = 15\%$

उदाहरण 3 सँग सम्बन्धित अभ्यास

(1) SP $=$ रु. 5000 - $\frac{12}{100} \times$ रु. 5000 $=$ रु. 4400

VAT सहित घडिको मूल्य $=$ रु. 4400 $+ \frac{13}{100} \times$ रु. 4400 $=$ रु. 4972

(2) $SP = \text{रु. } 10000 - \frac{8}{100} \times \text{रु. } 10W000 = \text{रु. } 1200$

VAT सहित क्यामेराको मूल्य $= \text{रु. } (9W200 + \frac{10}{100} \times \text{रु. } 9200) = \text{रु. } 10120$

(3) $SP = \text{रु. } (4000 - \frac{10}{100} \times \text{रु. } 40000) = \text{रु. } 36000$

VAT सहित कम्प्युटरको मूल्य $= \text{रु. } (36000 + \frac{13}{100} \times \text{रु. } 36000) = \text{रु. } 40680$

उदाहरण 4 सँग सम्बन्धित अभ्यास

(1) छुट रकम $= \frac{10}{100} \times \text{रु. } 4000 = \text{रु. } 400$

VAT रकम $= \text{रु. } \frac{15}{100} \times \text{रु. } 3600 = \text{रु. } 540$

(2) अङ्कित मूल्य $= \frac{2025 \times 100}{15} = \text{रु. } 13500$

VAT रकम $= \text{रु. } \frac{10}{100} = \text{रु. } 11475 = \text{रु. } 1147.50$

(3) अङ्कित मूल्य $= (3000 + 255) = \text{रु. } 3255$

छुट प्रतिशत $= \text{रु. } \frac{755}{3255} \times 100\% = \text{रु. } 7.83\%$

(4) $SP = \text{रु. } \frac{5610}{110} \times \text{रु. } 100 = \text{रु. } 5100$

अङ्कित मूल्य $= \text{रु. } 5100 \times \frac{105}{85} = \text{रु. } 6000$

उदाहरण 5 सँग सम्बन्धित अभ्यास

(1) (क) $\text{रु. } 12000 \times \frac{160}{100} = \text{रु. } 19200$ (ख) $\text{रु. } 114.92 \times 25000 = \text{रु. } 2873000$

(ग) $\text{रु. } 15000 \times \frac{9.35}{10} = \text{रु. } 14025$ (घ) $\text{रु. } 28.91 \times 28000 = \text{रु. } 809480$

(ङ) $\text{रु. } 75.63 \times 3000 = \text{रु. } 226890$ (च) $\text{रु. } 15.65 \times 17000 = \text{रु. } 226050$

उदाहरण 6 सँग सम्बन्धित अभ्यास

1. $\frac{216860}{108.43} = 2000$ अमेरिकन डलर 2. $\frac{1064250}{354.75} = 3000$ कुवेती दिनार

3. $\frac{62600}{15.65} = 4000$ चिनियाँ युआन

उदाहरण 7 सँग सम्बन्धित अभ्यास

1. 1.05 अमेरिकन डलर = 1 युरो 1 युरो = 71.85 भा.रु.

x भा.रु. (मानौँ)	= 7500 अमेरिकी डलर
$1.05 \times x$	$= 7500 \times 71.85$

अथवा, $x = \frac{7500 \times 71.85}{1.05} = 513214.28$ भा.रु.

2. $839125 \times 500 = 10000 \times 8.60 \times x$

   अथवा, $x = \frac{839125 \times 5000}{10000 \times 8.60} = 48786.3$ भा.रु.

3. $7958 \times 382950 = 100 \times 85.10 \times x$

   अथवा, $x = \frac{7958 \times 382950}{100 \times 85.10} = x$

   अथवा, $x = 358110$ ने.रु.

6. **सारांश** :

हाल VAT प्रतिशत नेपालमा 13% छ । तर प्रश्नमा 13% भन्दा अन्य पनि दिइएको छ । यी सबै शर्तमा आधारित तथा गणितीय अवस्थाहरूमा आधारित दरहरू हुन् । तपाईंले आफ्नो घरायसी कामका लागि प्राप्त VAT बिलको अध्ययन गर्नुहोला । त्यस्तै मुद्रा विनिमय नेपालमा राष्ट्र बैङ्कद्वारा निर्धारित हुन्छ । उक्त विनिमय दर हेरी आफैँ प्रश्न निर्माण गर्ने प्रयास गर्नुहोला । समूहमा छलफल गरेर पनि यो पाठको बारेमा तयारी गर्न सकिन्छ ।

एकाई : 3

चक्रीय व्याज (Compound Interest)

1. **परिचयः**

कुनै धनको प्रत्येक वर्ष वा निश्चित समय अवधिपछि प्राप्त हुने व्याजलाई सावाँसँग जोडेर व्याज निकालिन्छ । रकम लिए बापत निश्चित अवधि पछि तिरिने थप रकम नै व्याज हो । ऋण दिइएको वा लिइएको रकम नै मूलधन हो । यस पाठमा अति छोटो उत्तर आउने (ज्ञानसँग सम्बन्धित), छोटो उत्तर आउने (बोधसँग सम्बन्धित), लामो उत्तर आउने (प्रयोगसँग सम्बन्धित) र लामो उत्तर आउने (उच्च दक्षताको) प्रश्नहरुका सम्बन्धी यो एकाईमा छलफल गरिएको छ ।

2. **सिकाई उपलब्धिः**

यस एकाईको अध्ययन पछि निम्न लिखित सिकाई उपलब्धि हाँसिल हुनेछ । "वित्तीय संस्थामा गई चक्रीय व्याजको गणना पद्धतिको जानकारी लिन र यस सम्बन्धी साधारण समस्याहरु समाधान गर्न ।"

3. **आधारभूत विषयवस्तुः**

साधारण व्याज (Simple Interest) कुनै निश्चित समयका लागि एकमुष्ट व्याज निकालिन्छ भने त्यसलाई साधारण व्याज भनिन्छ । यदि समय महिना (वा दिन) मा र व्याज दर प्रति महिना (वा दिन) मा दिइएका छन् भने महिना (वा दिनलाई) वर्षमा लगेर र दर प्रतिवर्षमा लगेर साधारण व्याज निकाल्न सकिन्छ । यदि मूलधन (P), समय (T), व्याजदर (R) दिइएको अवस्थामा साधारण व्याज $(SI) = \frac{PTR}{100}$ हुन्छ ।

यसै सूत्रलाई सरलीकरण गरी $P = \frac{100I}{TR}, T = \frac{100I}{PR}$ र $R = \frac{100I}{PT}$ लेख्न सकिन्छ ।

व्याज सहितको रकमलाई मिश्रधन भन्दछन् ।

त्यसैले, मिश्रधन $(A) = P + I = P + \frac{PTR}{100}$

र यसलाई सरल गर्दा $P = \frac{100A}{100+TR}$ पनि लेख्न सकिन्छ ।

4. **मूख्य विषयवस्तुः**

चक्रीय व्याज (Compound Interest)

कुनै धन राशि वार्षिक वा अर्धवार्षिक वा अन्य समयावधिका लागि मूलधनका रुपमा रही प्राप्त व्याज सावाँसँग जोडेर व्याज निकालिन्छ भने त्यसलाई चक्रीय व्याज भनिन्छ । यी पाठमा वार्षिक र अर्धवार्षिक चक्रीय व्याज तथा चक्रीय मिश्रधन गणना गर्ने सम्बन्धी मात्र विषयवस्तु

अध्ययन/अध्यापन गरिनेछ ।

यदि सावाँ (P), समय (T), व्याजदर (R), मिश्रधन (A) भए निम्नलिखित सूत्रहरु जान्नु आवश्यक छ ।

वार्षिक चक्रीय मिश्रधन (A) $= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^{T}$

अर्ध-वार्षिक चक्रीय मिश्रधन (A) $= P\left(1+\frac{R}{200}\right)^{2T}$

वार्षिक चक्रीय व्याज (CI) = चक्रीय मिश्रधन – सावाँ

$= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^{T\text{-}P}$

$= P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^{T\text{-}1}\right]$

अर्ध-वार्षिक चक्रीय व्याज $= P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^{2T\text{-}1}\right]$

यदि T_1 वर्ष, T_2 वर्ष र T_3 वर्षका लागि व्याजदर R_1, R_2 र R_3 प्रतिशत प्रतिवर्ष भएमा

मिश्रधन (A) $= P\,(1 + \frac{R_1}{100})^{T_1}, (1 + \frac{R_2}{100})^{T_2}, (1 + \frac{R_3}{100})^{T_3}$ हुन्छ ।

त्यस्तै, n वर्ष m महिनाको चक्रीय मिश्रधन

$A = P(1 + \frac{R}{100})^{n} \times (1 + \frac{mR}{100})$ हुन्छ ।

साधारण व्याज प्रत्येक वर्ष गणना गरेर पनि चक्रीय व्याज पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

उदाहरण : 1

रु. 5000 को प्रतिवर्ष 5% का दरले 2 वर्षको चक्रीय मिश्रधन र चक्रीय व्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।

तरिका नं. 1

समाधानः प्रथम (पहिलो वर्ष) का लागि

सावाँ (P) = रु. 5000, व्याजदर (R) = 5%

साधारण व्याज (I) $= \frac{P \times T \times R}{100}$

$= \frac{5000 \times 1 \times 5}{100}$

$= रु.\ 250$

मिश्रधन $(A) = P+I$ $= रु.\ 5000 + रु.\ 250 = रु.\ 5250$

दोस्रो वर्षका लागि

सावाँ $(P) =$ रु. 5250, व्याजदर $(R) = 5\%$

साधारण व्याज (I) $= \frac{PTR}{100} = \frac{5250 \times 1 \times 5}{100} =$ रु. 262.50

मिश्रधन $(A_2) = P+I$ $=$ रु. 5250 + रु. 262.50

$=$ रु. 5512.50

$\therefore$ चक्रीय मिश्रधन $=$ रु. 5512.50

चक्रीय व्याज $=$ रु. 5512.50 - रु. 5000

$=$ रु. 512.50

अर्को तरिका

यहाँ, सावाँ (P) $=$ रु. 5000

समय (T) $=$ 2 वर्ष

व्याजदर (R) $= 5\%$ प्रतिवर्ष

चक्रीय मिश्रधन (A) $= ?$

चक्रीय व्याज (CI) $= ?$

हामीलाई थाहा छ, $A = P\left(1+ \frac{R}{100}\right)^T$

अथवा, $A = 5000\left(1+ \frac{5}{100}\right)^2$

$= 5000 \times \left(\frac{105}{100}\right)^2$

$=$ रु. 5512.50

$\therefore$ (i) चक्रीय मिश्रधन रु. 5512.50

(ii) चक्रीय व्याज (CI) $=$ रु. 5512.50 - रु. 5000 $=$ रु. 512.50

अभ्यास : 1

1. यदि चक्रीय मिश्रधन (A), सावाँ (P), समय (T) र व्याजदर (R) भए

(क) वार्षिक चक्रीय मिश्रधन, (ख) अर्ध वार्षिक चक्रीय व्याजको सूत्र लेख्नुहोस् ।

2. यदि सावाँ (P), व्याजदर (R) र समय (T) भए अर्धवार्षिक मिश्रधन (A) लाई P, T र R का पदमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

3. रु. 8000 को वार्षिक 8% का दरले (क) 2 वर्षको चक्रीय मिश्रधन, (ख) चक्रीय व्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. रु. 75000 को वार्षिक चक्रीय व्याजदर 10% ले 3 वर्षको चक्रीय मिश्रधन र चक्रीय व्याज कति हुन्छ ? सूत्र प्रयोग गरी निकाल्नुहोस् ।

उदाहरण : 2

रु. 20000 को 1 वर्ष 6 महिनाको वार्षिक 10% का दरले हुन आउने साधारण व्याजभन्दा अर्धवार्षिक चक्रीय-व्याज कतिले फरक छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान, यहाँ, सावाँ (P) = रु. 20000

समय (T) $= 1\frac{1}{2}$ वर्ष = 1.5 वर्ष

व्याजदर (R) = 10% प्रति वर्ष

साधारण व्याज = ?

अर्धवार्षिक चक्रीय व्याज = ?

हामीलाई थाहा छ,

साधारण व्याज (S.I.) $= \frac{PTR}{100}$

$= \frac{20000 \times 1.5 \times 10}{100}$

= रु. 3000

अर्धवार्षिक चक्रीय व्याज (CI) $= P\left[\left(1+\frac{R}{200}\right)^{2T-1}\right]$

$= 20000\left[\left(1+\frac{10}{200}\right)^{2\times1.5-1}\right]$

$= 20000\left[(1.05)^{3-1}\right]$

$= 20000 \times [1.157625 - 1]$

$= 20000 \times 0.157625$

= रु. 3152.50

$\therefore$ साधारण व्याज रु. 3000 र अर्धवार्षिक चक्रीय व्याज रु. 3152.50 हुन्छ ।

फरक = रु. 3152.50 - रु. 3000 = रु. 152.50

अभ्यास : 2

1. रु. 15000 को 8% प्रतिवर्षका दरले 2 वर्षमा हुन आउने साधारण व्याज र अर्धवार्षिक चक्रीय व्याजको फरक कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. प्रति वर्ष 6% का दरले 3 वर्षका लागि सापट लिएको धन रु. 50000 मा साधारण व्याज र चक्रीय व्याजको फरक पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. रञ्जनले रु. 10000 एउटा बैङ्कमा र अर्को एउटा फाइनान्स कम्पनीमा रु. 10000 मुद्धति खातामा जम्मा गरेछ । यी दुवैले वार्षिक 12% का दरले व्याज दिन्छन् । बैङ्कले अर्धवार्षिक व्याज दिन्छ भने फाइनान्स कम्पनीले वार्षिक चक्रीय व्याज दिन्छ । अब 2 वर्षमा कसले कति व्याज दिँदो रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. तपाईको घर नजिक रहेका कुनै 2 ओटा बैङ्क अथवा वित्तिय संस्थाले 2 वर्षमा रु. 100000 को वार्षिक चक्रीय व्याज कति-कति दिन्छन् ? बैङ्कमा व्याजदर सोधि गणना गर्नुहोस् ।

उदाहरण : 3

कुनै धनराशिको 2 वर्षमा हुने साधारण व्याज र चक्रीय व्याज क्रमशः रु. 1000 र रु. 1050 छन् भने वार्षिक व्याजदर र साँवा पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधानः

यहाँ, साधारण व्याज (SI) = रु. 1000

चक्रीय व्याज (CI) = रु. 1050

समय (T) = 2 वर्ष

व्याजदर (R) = ?

हामीलाई थाहा छ,

साधारण व्याज (S.I.) $= \frac{PTR}{100}$

अथवा, $1000 = \frac{P \times 2 \times R}{100}$

$\frac{1000 \times 100}{2} = PR$

$50000 = PR$ ....(i)

फेरि, संयुक्त व्याज (C.I.) $= P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^{T-1}\right]$

अथवा, $1050 = P\left[\left(1+\frac{R}{100} - 1\right)\left(1 + \frac{R}{100} + 1\right)\right]$

अथवा, $1050 = P\left[\frac{R}{100}\left(2 + \frac{R}{100}\right)\right]$

अथवा, $1050 = \frac{PR}{100}\left(2 + \frac{R}{100}\right)$

अथवा, $1050 \times 100 = PR\left(2 + \frac{R}{100}\right)$

अथवा, $105000 = 50000\left(2 + \frac{R}{100}\right)$

अथवा, $\frac{105000}{50000} = 2 + \frac{R}{100}$

अथवा, $2.1 = 2 + \frac{R}{100}$

अथवा, $2.1 - 2 = \frac{R}{100}$

अथवा, $0.1 \times 100 = R$

अथवा, $10 = R$

फेरि समी (i) बाट

अथवा, $50000 = P \times 10$

अथवा, $\frac{50000}{10} = P$

अथवा, $5000 = P$

$\therefore$ सावाँ रु. 5000 र व्याजदर 10% प्रति वर्ष छ।

अभ्यास : 3

1. कुनै रकमको 2 वर्षमा साधारण व्याज र वार्षिक चक्रीय व्याज क्रमशः रु. 1920 र रु. 1996.80 हुन्छ। मूलधन र व्याजदर पत्ता लगाउनुहोस्।
2. कुनै धनराशिको 10% वार्षिक व्याजदरले दुई वर्षमा चक्रीय व्याज रु. 420 हुन्छ भने त्यत्तिकै समयका लागि उही नै वार्षिक व्याजदरले सोही सावाँमा लाग्ने साधारण व्याज कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस्।
3. कुनै रकमको 2 वर्षको 10% ले हुन आउने चक्रीय व्याज र त्यत्ति नै दर र समयले हुने साधारण व्याजको फरक रु. 124.50 हुन्छ भने साँवा पत्ता लगाउनुहोस्।
4. रु. 10000 को 2 वर्षमा अर्धवार्षिक चक्रीय व्याजदरमा चक्रीय व्याज रु. 4641 हुन्छ भने व्याजको दर पत्ता लगाउनुहोस्।

उदाहरण : 4

वार्षिक चक्रीय व्याजदरमा कुनै रकमको 2 वर्षमा मिश्रधन रु. 15840 र 3 वर्षमा रु. 19008 पुग्दछ भने मूलधन र चक्रीय व्याजदर पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधानः

यहाँ, 2 वर्षको चक्रीय मिश्रधन = रु. 15840

अथवा, $P\left(1+\frac{R}{100}\right)^T$ = रु. 15840 ....(i)

फेरि 3 वर्षको चक्रीय मिश्रधन = रु. 19000

अथवा, $P\left(1+\frac{R}{100}\right)^3$ = रु. 19008

अथवा, $P\left(1+\frac{R}{100}\right)^2 \times (1 + \frac{R}{100}) = 19008$

अथवा, $15840\ (1 + \frac{R}{100}) = 19008$ [समी (i) बाट]

अथवा, $(1 + \frac{R}{100}) = \frac{19008}{15840}$

अथवा, $(1 + \frac{R}{100}) = 1.20$

अथवा, $\frac{R}{100} = 1.20 - 1$

अथवा, $\frac{R}{100} = 0.20$

अथवा, $R = 0.20 \times 100 = 20\%$

समी (i) बाट

$$P\left(1+\frac{R}{100}\right)^2 = 15840$$

अथवा, $P\ (1.20)^2 = 15840$

अथवा, $P \times 1.44 = 15840$

अथवा, $P = \frac{15840}{1.44} = 11,000$

$\therefore$ मूलधन = रु. 11,000 र व्याजदर = 20% प्रति वर्ष

अभ्यास : 4

1. वार्षिक चक्रीय व्याजदरमा कुनै रकम 2 वर्षमा रु. 9,680 र 3 वर्षमा रु. 10,648 पुग्दछ भने मूलधन र व्यादर पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. वार्षिक चक्रीय व्याजदरमा कुनै रकमको 3 वर्षमा मिश्रधन रु. 66,550 र 4 वर्षमा रु. 73,205 पुग्दछ भने मूलधन र चक्रीय व्याजदर पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. वार्षिक चक्रीय व्याज अनुसार कुनै रकमको मिश्रधन 2 वर्षमा रु. 2,420 र 3 वर्षमा रु. 2,662 पुग्दछ भने व्याजदर र मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण : 5

एउटा धनराशि चक्रीय व्याजका आधारमा 45 वर्षमा आठ गुणा हुन्छ भने त्यही धनराशि कति वर्षमा दुई गुणा हुन्छ ?

समाधानः

यहाँ, 45 वर्षमा चक्रीय मिश्रधन आठ गुणा हुन्छ । त्यसले

$$A = P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^{T}\right]$$

अथवा, $$8P = P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^{45}\right]$$

अथवा, $$8 = \left(1+\frac{R}{100}\right)^{45} \text{..........(i)}$$

फेरि, $$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^{T}$$

अथवा, $$2P = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^{T}$$

अथवा, $$2 = \left(1+\frac{R}{100}\right)^{T}$$

अथवा, $$23 = \left(1+\frac{R}{100}\right)^{3T}$$

अथवा, $$8 = \left(1+\frac{R}{100}\right)^{3T}$$ [दुवैतिर तेस्रो घाँत लिदा]

अथवा, $$\left(1+\frac{R}{100}\right)^{45} = \left(1+\frac{R}{100}\right)^{3T}$$

अथवा, $45 = 3T$ [एउटै आधार भएकाले]

अथवा, $15 = T$

$\therefore$ इस्ट समय $= 15$ वर्ष

अभ्यास : 5

1. एउटा धनराशी चक्रीय व्याजका आधारमा 8 वर्षमा 2 गुणा हुन्छ भने त्यही धनराशी कति वर्षमा 8 गुणा हुन्छ ?
2. वार्षिक 3% चक्रीय व्याजदरमा रु. 15000 सापट लिँदा कति वर्षमा रु. 15913.5 हुन्छ ?
3. एउटा धनराशी चक्रीय व्याजका आधारमा 14 वर्षमा 9 गुणा हुन्छ भने त्यही धनराशी कति वर्षमा 3 गुणा हुन्छ ?

5. पृष्ठपोषण :

उदाहरण 1 सँग सम्बन्धित अभ्यास

1. (क) $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^{T}$ (ख) $CI = P\left[\left(1+\frac{R}{200}\right)^{2T-1}\right]$

2. $A = P\left(1+\frac{R}{200}\right)^{2T}$

3. (क) $A = 8000\left(1+\frac{8}{200}\right)^{2}$ = रु. 9331.2

   (ख) CI = रु. 9331.2 - रु. 8000 = रु. 1331.2

4. $A = 75000\left(1+\frac{10}{100}\right)^{3}$ = रु. 99825, CI= रु. 99825 - रु. 75000 = रु. 24825

उदाहरण 2 सँग सम्बन्धित अभ्यास

1. $CI = \frac{15000 \times 8 \times 2}{100}$ = रु. 2400 [सूत्र प्रयोग गरी साधारण व्याज निकाल्ने]

   $CI = 15000\left[\left(1+\frac{8}{200}\right)^{4-1}\right]$ = रु. 2547.87 [सूत्र प्रयोग गरी अर्धवार्षिक व्याज निकाल्ने]

   CI- SI = रु. 2547.87 - रु. 2400 = रु. 147.87

2. $SI = \frac{50000 \times 6 \times 3}{100}$ = रु. 9000

   $CI = 15000\left[\left(1+\frac{6}{200}\right)^{3-1}\right]$ = रु. 9550.80

   CI- SI = रु. 9550.80 - रु. 9000 = रु. 550.80

3. वार्षिक चक्रीय व्याज

$= 10000\left[\left(1+\frac{12}{200}\right)^{2-1}\right]$

$=$ रु. 2544

अर्ध वार्षिक चक्रीय व्याज $= 10000\left[\left(1+\frac{12}{2\times100}\right)^{2\times2-1}\right]$

$= 2624.7$

$\therefore$ रु. 2624.7 - रु. 2544 $=$ रु. 80.7 (बैंङ्कले बढी व्याज दिन्छ ।)

4. घर नजिकको बैङ्क अथवा वित्तिय संस्थाको व्याजदर सोधी पत्ता लगाउनुहोस् । नभए आफूभन्दा जेष्ठ व्यक्तिलाई सोधेर पत्ता लगाउने काम गर्नुहोस् ।

उदाहरण 3 सँग सम्बन्धित अभ्यास

1. $SI = \frac{PTR}{100}$

अथवा, $1920 = \frac{P\times2\times R}{100}$ बाट $PR = 96000$, पत्ता लगाउनुहोस् ।

फेरि, $1996.80 = P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^{2-1}\right]$ बाट

$1996.80 = P[\frac{R}{100}\times(2+\frac{R}{100})]$ सूत्र प्रयोग गरी PR को मान प्रतिस्थापन गर्नुहोस् र R को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

$R = 8\%$ प्रतिवर्ष, $P =$ रु. 12000

2. $420 = P\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^{2-1}\right]$ सूत्र प्रयोग गरी $P =$ रु. 2000 हुन्छ ।

फेरि, $SI = \frac{PTR}{100} = \frac{2000\times2\times10}{100} =$ रु. 400

3. $CI = P\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^{2-1}\right] = 0.21\,P$ र $SI = \frac{P\times2\times10}{100} = 0.2P$

फेरि, $0.21P - 0.2P =$ रु. 124.50 बाट $P =$ रु. 12450

4. $CI = P\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^{2T-1}\right]$ सूत्र प्रयोग गरी

$4641 = 10000\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^{2\times2-1}\right]$

अथवा, $1.4641 = \left(1+\frac{10}{100}\right)^{2\times2}$

अथवा, $1.1 = 1 + \frac{R}{200}$

अथवा, $R = 20\%$ प्रतिवर्ष

उदाहरण 4 सँग सम्बन्धित अभ्यास

1. $9680 = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$ र $10648 = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^3$ सूत्र प्रयोग गरी

$\frac{10648}{9680} = 1 + \frac{R}{100}$

सरल गर्दा, $R = 10\%$ र $P =$ रु. 8000 हुन्छ ।

2. प्रश्न नं. (1) जस्तै गरी $665500 = P(1 + \frac{R}{100})^3$ र

$73205 = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^4$ बाट

$73205 = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^3 \times (1 + \frac{R}{100})$ गरी

$R = 10\%$ र $P =$ रु. 50000 पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. $P\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$

$= 2420$ र $P\left(1+\frac{R}{100}\right)^3 = 2662$ [सूत्र प्रयोग गरी $1 + \frac{R}{100} = 1.1$]

अथवा, $R = 10\%$ र $P = \frac{2420}{1.21}$ = रु. 2000 निकाल्नुहोस् ।

उदाहरण 5 सँग सम्बन्धित अभ्यास

1. $2P = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^8$ बाट $\left(1+\frac{R}{100}\right)^8 = 2$ निकाल्नुहोस् ।

त्यस्तै $8P = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^T$ बाट $(2)^3 = \left(1+\frac{R}{100}\right)^T$ बाट $T = 24$ वर्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^T$ बाट

$15213.5 = 15000\left(1+\frac{R}{100}\right)^T$

अथवा, $\frac{15213.5}{15000} = (1.03)^T$

अथवा, $(1.03)^2 = (1.03)^T$ बाट $T = 2$ वर्ष हुन्छ ।

3. $9P = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^{14}$ र $3P = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^T$ बाट

$T = 5$ वर्ष हुन्छ ।

6. **सारांश** :

कक्षा १० को अन्तिम परिक्षामा सोधिएका पुराना प्रश्नहरू समाधान गर्नुहोस् । समस्या समाधान गर्दा समस्यालाई राम्ररी बुझ्ने प्रयास गर्नुहोस् । त्यस्तै आफैँ प्रश्न निर्माण गरी समाधान गर्ने प्रयास गर्नुहोस् । मुख्य विषयवस्तुमा दिईएका जानकारीहरू पुनरावलोकन गर्ने र उदाहरणहरूको अध्ययन गर्ने काम गर्नुहोस् ।

एकाई : 4

जनसङ्ख्या वृद्धि तथा मिश्रित ह्रास (Population Growth and Depreciation)

1. **परिचय :**

कुनै पनि निश्चित स्थानमा जन्म, मृत्यु, बसाइँ सराइले निश्चित प्रतिशत दरमा जनसङ्ख्या बढ्ने वा घट्ने गर्दछ । त्यस्तै कुनै मेसिनरी सामानको मूल्यमा निरन्तर कमि आउँछ । यी विषय वस्तुको अध्ययन यस एकाईमा गरिएको छ । धेरै छोटो उत्तर आउने प्रश्नहरू (ज्ञानसँग सम्बन्धित), छोटो उत्तर आउने प्रश्नहरू (वोधसँग सम्बन्धित प्रश्नहरू), लामो उत्तर आउने प्रश्नहरू (प्रयोगसँग सम्बन्धित प्रश्नहरू) र लामो उत्तर आउने प्रश्नहरू (उच्च दक्षताका प्रश्नहरू) सम्बन्धी छलफल गरिने छ ।

2. **सिकाई उपलब्धि :**

यस एकाईको अध्ययन पश्चात् निम्न लिखित सिकाई उपलब्धि हासिल हुनेछ ।

- "जनसङ्ख्या वृद्धि र मिश्र ह्रास सम्बन्धी साधारण समस्याहरू समाधान गर्न"

3. **आधारभूत विषयवस्तु :**

- एउटा निश्चित समयावधिमा जनसङ्ख्यामा भएको सापेक्षित वृद्धिलाई जनसङ्ख्या वृद्धि भनिन्छ ।
- कुनै वस्तुको मूल्यमा प्रत्येक वर्ष वा निश्चित समयको अन्तरालमा एउटै दरमा हुन आउने ह्रास साधारण ह्रास हुन्छ ।
- x मा r% वृद्धि हुँदा नयाँ मान $(x + \frac{r}{100}x) = x(1+\frac{r}{100})$ हुन्छ ।
- x मा r% कमी आउँदा नयाँ मान $(x - \frac{rx}{100})) = x(1+\frac{r}{100})$ हुन्छ ।
- यदि "V" सुरूको मूल्य र 'S' अन्तिम मूल्य हो भने T वर्षमा हुने साधारण ह्रास मूल्य = V-S हुन्छ ।

4. **मुख्य विषय वस्तु**

- मानौ, P_0 र P_T ले क्रमशः सुरुको र T वर्ष पछिको जनसङ्ख्यालाई जनाउँछन् भने R% प्रति वर्षका दरले जनसङ्ख्या वृद्धि हुँदा

  $P_T = P_0(1 + \frac{R}{100})^T$ हुन्छ ।

- जनसङ्ख्या R% प्रति वर्षका दरले ह्रास भए $P_T = P_0\left(1 - \frac{R}{100}\right)^T$ हुन्छ ।
- यदि R_1% र R_2% ले लगातार T_1 वर्ष र T_2 वर्षको जनसङ्ख्या वृद्धिलाई जनाउँछन् र

त्यस्तै P_0 र P_T ले सुरूको र T वर्ष पछिको जनसङ्ख्यालाई जनाउँछन् भने

$P_T = P_0\left(1+\frac{R}{100}\right)^{T_1} \times P_T = P_0\left(1+\frac{R}{100}\right)^{T_2}$ हुन्छ ।

- T वर्षपछि, V मूल्यको वस्तु R% ह्रासका दरले मिश्रह्रास $D_T=V\left(1+\frac{R}{100}\right)^T-1$ र वस्तुको मूल्य $S=V\left(1+\frac{R}{100}\right)^T$ हुन्छ ।

उदाहरण 1 :

एउटा गाउँको अहिलेको जनसङ्ख्या 60000 छ । यदि जनसङ्ख्या वृद्धिदर 10% प्रतिवर्ष छ भने 2 वर्षपछि सो गाउँको जनसङ्ख्या कति होला ?

समाधान :

यहाँ, 2 वर्ष पहिलेको जनसङ्ख्या $(P_o) = 60000$

2 वर्षपछिको जनसङ्ख्या $(P_T) = ?$

जनसङ्ख्या वृद्धिदर $(R) = 10\%$

हामीलाई थाहा छ,

$$P_T = P_0\left(1+\frac{R}{100}\right)^T$$

अथवा,
$$P_T = 60000\left(1+\frac{10}{100}\right)^2$$
$$= 60000 + \left(\frac{100+10}{100}\right)^2$$
$$= 60000 + \left(\frac{110}{100}\right)^2$$
$$= 72600$$

$\therefore$ 2 वर्षपछिको जनसङ्ख्या 72600 छ ।

अभ्यास : 1

1. P_0, P_T, R र T ले क्रमशः कुनै स्थानको सुरूको जनसङ्ख्या T वर्ष पछिको जनसङ्ख्या, जनसङ्ख्या वृद्धिदर प्रतिशत, प्रतिवर्ष र समय जनाउँछन् भने यिनीहरूको सम्बन्ध के हुन्छ ? लेख ।
2. कुनै गाउँको जनसङ्ख्या 2 वर्ष पहिले 54000 थियो । त्यहाँको जनसङ्ख्या वृद्धिदर 5% प्रतिवर्ष छ भने हालको जनसङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. विजय नगरको हालको जनसङ्ख्या 60,000 छ । प्रत्येक वर्ष 2% बढ्दै गएमा 2 वर्षपछि सो

ठाउँको जनसङ्ख्या कति पुग्ला ?

उदाहरण : 2

शहरको जनसङ्ख्या 10,00,000 छ । यदि जनसङ्ख्या वृद्धिका कारणले 2.5% र अन्यत्रबाट बसाइँसराई गरी यहाँ आएका कारणले 1.5% का दरले वृद्धि हुँदा 2 वर्षपछि उक्त शहरको जनसङ्ख्या कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, सुरूको जनसङ्ख्या (P_0) = 10,00,000

वास्तविक जनसङ्ख्या वृद्धिदर (R) = 2.5% + 1.5% = 4%

2 वर्षपछिको जनसङ्ख्या (P_2) = ?

हामीलाई थाहा छ,

$$P_T = P_0\left(1+\frac{R}{100}\right)^T$$

अथवा, $P_2 = 10,00,000(1+\frac{4}{100})^2$

$= 10,00,000\,(\frac{104}{100})^2$

$= 1081600$

त्यसैले 2 वर्षपछिको उक्त शहरको जनसङ्ख्या 1081600 छ ।

नोट : $P_T = P_0\left(1+\frac{R}{100}\right)^T$ मा P_0 पनि पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

अभ्यास : 2

1. एउटा शहरको जनसङ्ख्या 80,000 छ । यदि जनसङ्ख्या वृद्धिको कारणले 2% र अन्यत्रबाट बसाइँसराइ गरी यहाँ आएको कारणले 3% का दरले वृद्धि हुँदा 2 वर्षपछि उक्त शहरको जनसङ्ख्या कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. एउटा विद्यालयको वर्तमान विद्यार्थी सङ्ख्या 1200 छ । प्रत्येक वर्ष 5% का दरले विद्यार्थी सङ्ख्या घट्दै गएको हो भने 2 वर्षअघि सो विद्यालयमा कति विद्यार्थी थिए ? 2 वर्षपछि कति विद्यार्थी हुनेछन् ?

3. कुनै एउटा शहरको अहिलेको जनसङ्ख्या 1,05,840 छ । यदि प्रत्येक वर्ष जनसङ्ख्या 3% वृद्धि र 2% अन्यत्रबाट बसाइँ सराइ भएर 2 वर्ष अगाडिको सो शहरको जनसङ्ख्या कति थियो होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण : 3

कुनै एउटा शहरको वि.सं. 2065 को जनसङ्ख्या 100000 थियो । यदि वार्षिक जनसङ्ख्या वृद्धि दर र बसाइँसराइले 2068 को जनसङ्ख्या 133100 थियो भने जनसङ्ख्या वृद्धिदर कति थियो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, वि.सं. 2065 को जनसङ्ख्या $(P_0) = 100000$

वि.सं. 2068 को जनसङ्ख्या $(P_T) = 133100$

समय $(T) = 3$ वर्ष

जनसङ्ख्या वृद्धिदर $(R) = ?$

हामीलाई थाहा छ,

$$P_T = P_0\left(1 + \frac{R}{100}\right)^T$$

अथवा, $133100 = 100000\left(1 + \frac{R}{100}\right)^3$

$$\frac{133100}{100000} = \left(1 + \frac{R}{100}\right)^3$$

अथवा, $\sqrt[3]{\frac{133100}{100000}} = \left(1 + \frac{R}{100}\right)^1$ [दुवैतिर तेस्रो घात लिँदा]

अथवा, $1.1 = 1 + \frac{R}{100}$

अथवा, $(1.1 - 1) \times 100 = R$

अथवा, $R = 10\%$ प्रतिवर्ष

अभ्यास : 3

1. एउटा गाउँको 2 वर्ष अघिको जनसङ्ख्या 5400 र हालको जनसङ्ख्या 5934 छ । जनसङ्ख्या वृद्धिदर पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. एउटा गाउँको जनसङ्ख्या एक वर्ष पहिले 10,000 थियो । दुई वर्ष पछिको जनसङ्ख्या 13310 हुन्छ । जहाँ जनसङ्ख्या वृद्धिदर प्रत्येक वर्ष एउटै छ । उक्त जनसङ्ख्या वृद्धिदर पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण : 4

(क) नेपाल राष्ट्रिय मा.वि. को वर्तमान विद्यार्थी सङ्ख्या 1,200 छ । प्रत्येक वर्ष 5% का दरले विद्यार्थी सङ्ख्या घट्दै गएको हो भने 2 वर्ष अघि सो विद्यालयमा कति विद्यार्थी थिए ? 2 वर्ष

पछि सो विद्यालयमा विद्यार्थी सङ्ख्या कति पुग्ला ?

समाधान :

यहाँ, वर्तमान सङ्ख्या (P) = 1,200 जना

घट्ने दर (R) = 5%

2 वर्षअघिको सङ्ख्या (P_0) = ?

प्रश्न अनुसार 2 वर्ष अघिको जनसङ्ख्या निकाल्दा,

$$P_T = P_0\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$$

$$P_T = P_0\left(\frac{P}{1-\frac{R}{100}}\right)^2$$

$$= \frac{1200}{\left(1-\frac{5}{100}\right)^2} = \frac{1200}{(0.95)^2}$$

$$= \frac{1200}{0.9025} = 1329.6$$

∴ 2 वर्ष अघिको विद्यार्थी सङ्ख्या 1,330 जना (लगभग) थियो ।

फेरी, 2 वर्षपछिको विद्यार्थी सङ्ख्या निकाल्दा

$$P_2 = P\left(1-\frac{R}{100}\right)^2$$

$$P_2 = 1200\left(1-\frac{5}{100}\right)^2$$

$$= 1200 \times 0.9025$$

$$= 1083$$

सो विद्यालयको विद्यार्थी सङ्ख्या 2 वर्षपछि 1,083 जना पुग्नेछ ।

(ख) 2060 सालको सुरुमा रतनपुरको जनसङ्ख्या 5,000 थियो । प्रत्येक वर्ष 10% का दरले जनसङ्ख्या वृद्धि हुँदै जाँदा 2062 सालको सुरुमा जनसङ्ख्या कति पुग्ला र 4,000 जना मानिसहरू 2062 सालको सुरुमा नै बसाइँ सरेर सो ठाउँमा आएका थिए भने 2064 सालको सुरुमा रतनपुरको जनसङ्ख्या कति पुग्ला ?

समाधान :

यहाँ, 2060 सालको सुरुको जनसङ्ख्या (P) = 5,000 जना

वृद्धिदर (R) = 10%

2060 देखि 2062 सालको सुरुको अवधि (T) = 2 वर्ष

2062 सालको सुरुको जनसंख्या (P_2) = ?

$\therefore$ 2062 सालको सुरुको जनसङ्ख्या

$$(P_2) = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$$

$$= 5000\left(1+\frac{10}{100}\right)^2$$

$$= 5000 \times 1.21 = 6,050$$

फेरि, 2062 सालमा बसाइँ सरेर थपिएको सङ्ख्यासमेत = 6,050 + 4,000 = 10,050 जना

अब, 2064 सालको सुरुसम्म पुग्ने जनसङ्ख्या (P_T) = $10,050\left(1+\frac{10}{100}\right)^2$

= 10,050 × 1.21 = 12160.5 = 12,161 (लगभग)

2062 सालको जनसंख्या (P) = 10,050

2062 देखि 2064 सालको अवधि (T) = ?

2064 सालको सुरुको जनसंख्या (P_T) = ?

यहाँ,

$$P_T = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$$

$$= 10,050\left(1+\frac{10}{100}\right)^2$$

$$= 10,050 \times 1.21$$

$$= 12160.5$$

$$= 12161 \text{ (लगभग)}$$

अतः 2062 सालको सुरुमा जनसङ्ख्या 6050 र 2064 सालको सुरुमा जनसङ्ख्या 12,161 पुग्दछ ।

अभ्यास : 4

1. एउटा विश्व विद्यालयमा रहेका विद्यार्थी सङ्ख्या प्रत्येक वर्ष 5% घट्दै गएछन् । यदि सो विश्वविद्यालयको विद्यार्थी सङ्ख्या हाल 9,025 छ भने 2 वर्ष अघिको सङ्ख्या कति थियो ? र 1 वर्षपछि कति पुग्ला ?

2. प्रत्येक वर्ष 10% का दरले कामदार सङ्ख्या बढाउँदै लगेको एउटा कारखानाले 2064 को सुरुमा 242 जना कामदार सङ्ख्या पुऱ्याएछ । कति वर्ष अघि सो कारखानामा 200 मात्र कामदार थिए ?

3. कुनै गाउँको जनसङ्ख्या 10,000 बाट 2 वर्षपछि 12100 पुगेछ भने वृद्धि दर पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण : 5

(क) बिनोदले 2061 सालको सुरुमा एउटा मोटरसाइकल रु. 1,10,000 मा किनेछन् । 2 वर्ष प्रयोग गरेपछि बार्षिक 5% का दरले ह्रास कट्टी गरी बेचे भने सो मोटरसाइकल कतिमा बेचेका थिए ?

समाधान :

यहाँ, 2061 सालमा,

मोटरसाइकलको खरिद मूल्य (P) = रु. 1,10,000

समय (T) = 2 वर्ष

बार्षिक ह्रास दर (R) = 5%

2 वर्ष पछिको मोटर साइकलको मूल्य (P_2) = ?

ह्रास कट्टी गरी 2 वर्षपछिको मूल्य

$$P_2 = P\left(1 - \frac{R}{100}\right)^2$$

$$= \text{रु. } 1,10,000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^2$$

$$= \text{रु. } 1,10,000\ (0.95)^2$$

$$= \text{रु. } 1,10,000 \times 0.9025$$

$$= \text{रु. } 99,275$$

उक्त मोटरसाइकल 2 वर्ष प्रयोग गरेपछि रु. 99,275 मूल्य कायम हुन्छ ।

(ख) सरिताले रु.6,00,000 मा किनेको कार 3 वर्षपछि रु. 4,37,400 बेचिन् भने उनले कति प्रतिशतका दरले मिश्रह्रास कटाएर बेचेकी थिइन् ?

समाधान :

यहाँ,

सुरुको मूल्य (P) = रु. 6,00,000

ह्रासकट्टी पछिको मूल्य (P_2) = रु. 4,37,400

अवधि (T) = 3 वर्ष

ह्रास दर (R) = ?

$\frac{P_T}{P} = \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T$

$\frac{4,37,400}{6,00,000} = \left(1 - \frac{R}{100}\right)^3$

$\frac{729}{1,000} = \left(1 - \frac{R}{100}\right)^3$

अथवा, $\left(\frac{9}{10}\right)^3 = \left(1 - \frac{R}{100}\right)^3$

अथवा, $\frac{9}{10} = 1 - \frac{R}{100}$

अथवा, $\frac{R}{100} = 1 - \frac{9}{10}$

अथवा, $\frac{R}{100} = \frac{1}{10}$

$\therefore\ R = 10\%$

अतः ह्रास दर (R) = 10%

(ग) सुदीपले आफ्नो मोटरसाइकल 3 वर्षसम्म प्रयोग गरेपछि, प्रतिवर्ष 10% का दरले ह्रास कट्टा गरी रु. 91125 मा बेचेछन् भने उनले सो मोटरसाइकल कतिमा किनेका थिए ?

समाधान :

यहाँ, ह्रास दर (R) = 10%

समय (T) = 3 वर्ष

बेचेको मूल्य (P_T) = रु. 91,125

किनेको मूल्य (P) = ?

$\therefore\ P = \frac{P_T}{\left(1-\frac{R}{100}\right)^T}$

$= \frac{91125}{\left(1-\frac{10}{100}\right)^3}$

$= \frac{91125}{(.9)^3} = \frac{91125}{0.729} =$ रु. 1,25,000

अतः सो मोटरसाइकल रु. 1,25,000 मा किनेका थिए ।

अभ्यास : 5

1. यदि एउटा मेसिनरी सामानको क्रयमूल्य (P), T वर्षपछिको घटेको मूल्य (P_T) र निश्चित रूपमा घट्ने दर (R) भए P_T, P, R र T को सम्बन्ध दर्शाउने सूत्र देखाउनुहोस् ।

2. सन्दिपले रु. 25,00,000 मा किनेको एउटा यात्रुबाहक बस 3 वर्ष प्रयोग गरी प्रतिवर्ष 10% का दरले ह्रास कट्टी गरी कतिमा बेचे होला ?

3. रु. 75,000 मा किनेको स्कुटर 2 वर्ष चलाएर रु. 67,687.50 मा बेचियो भने प्रतिवर्ष ह्रासदर कति थियो निकाल्नुहोस् ।

4. प्रतिवर्ष 6% का दरले ह्रास कट्टी हुँदा रु. 2,40,000 मा किनिएको एउटा छापा मेसिन कति वर्षपछि रु. 2,12,064 मा बेचिनुपर्दछ ?

5. सुरेन्द्रले एउटा माइक्रोबस खरिद गरी 3 वर्ष प्रयोग गरी प्रतिवर्ष 20% ह्रास कट्टागरी रु.3,07,200 मा बेचे भने उनले सो माइक्रोबस कतिमा खरिद गरेका थिए ?

6. प्रतिवर्ष 15% का दरले मूल्य ह्रास हुँदा एउटा मोटरसाइकलको मूल्य 3 वर्षपछि रु. 107471.88 पुग्दछ भने सो मोटरसाइकलको सुरुको मूल्य निकाल्नुहोस् ।

उदाहरण : 6

रामेश्वरले एउटा कम्प्युटर रु. 25,000 मा खरिद गरी प्रतिवर्ष 4% का दरले ह्रास कट्टा गरी केही वर्षपछि रु. 23,040 मा बेचेछन् भने उनले सो कम्प्युटर कति वर्ष प्रयोग गरेर बेचेका थिए ?

समाधान

यहाँ, कम्प्युटरको सुरुको मूल्य (P) = रु. 25,000

ह्रास दर (R) = 4%

पछिको मूल्य (P_T) = रु. 23,040

अवधि (समय) T = ?

$$P_T = P\left(1-\frac{R}{100}\right)^T$$

अथवा, $\left(1-\frac{4}{100}\right)^T = \frac{P_T}{P}$

अथवा, $\left(\frac{96}{100}\right)^T = \frac{23040}{25000}$

अथवा, $(0.96)^T = (0.96)^2$

$\therefore$ T = 2 वर्ष

अतः 2 वर्षसम्म सो कम्प्युटर प्रयोग गरिएको थियो ।

अभ्यास : 6

1. एउटा रु. 3000 मा किनेको मेसिनको मूल्य वार्षिक 10% का दरले ह्रास हुँदै जान्छ । कति

समयमा उक्त मेसिनरीको मूल्य रु. 24300 हुन्छ ?

2. रु. 15,00,000 मा किनिएको घरको मूल्य वार्षिक 10% का दरले ह्रास हुँदा कहिले सो घरको मूल्य रु. 12,15,000 होला ?

3. रक्षाले एउटा स्कूटर रु. 90000 मा किनिन् । 2 वर्षपछि रु. 84100 मा बेचिन भने कति प्रतिशत दरमा उक्त स्कूटरको मूल्य ह्रास भयो ?

5. **पृष्ठपोषण :**

यस एकाईमा भएका प्रत्येक प्रश्नलाई हल गर्दा नियमहरू र सूत्रहरूको आधारमा रही गर्नुहोस् । साथै यसअघिका कक्षा १० का अन्तिम परिक्षामा सोधिएका प्रश्नहरूलाई हल गर्नुहोस् ।

उदाहरण : 1 सँग सम्बन्धित अभ्यास

1. उत्तर : $P_T = P_0(1 + \frac{R}{100})T$ 2. उत्तर : 59535

3. उत्तर : 62424

उदाहरण : 2 सँग सम्बन्धित अभ्यास

उत्तर :

1. उदाहरणमा दिइए जस्तै गरी समाधान गर्नुहोस् । उत्तर : 88200

2. $1200 = P_0\left(1 - \frac{5}{100}\right)^2$

अथवा, $P_0 = 1330$ (लगभग) (सुरुमा) : 2 वर्षअघि

2 वर्षपछि विद्यार्थी सङ्ख्या $= 1200\left(1 - \frac{5}{100}\right)^2$

$= 1323$

3. $105840 = P_0\left(1 - \frac{5}{100}\right)^2$

अथवा, $105840 = P_0(\frac{441}{400})$

अथवा, $P_0 = 96000$

उदाहरण : 3 सँग सम्बन्धित अभ्यास

उत्तर :

1. $5934 = 5400(1 + \frac{r}{100})^2$ बाट $r = 5\%$ हुन्छ ।

2. $13310 = 100000\left(1 - \frac{R}{100}\right)^3$ बाट $r = 10\%$ प्रतिवर्ष हुन्छ ।

एक वर्ष पहिले र 2 वर्ष पछिको समय 3 वर्ष हुन्छ ।

उदाहरण : 4 सँग सम्बन्धित अभ्यास

उत्तर :

1. उदाहरणमा दिइए जस्तै गरी समाधान गनुहोस् । उत्तर : 10,000 र 8574

2. $242 = 200\left(1+\frac{10}{100}\right)^T$ बाट दुवैतिर एउटै आधार बनाउनुहोस् ।

   $T = 2$ वर्ष हुन्छ ।

3. $12100 = 10000\left(1+\frac{10}{100}\right)^T$ बाट $R = 10\%$ प्रतिवर्ष हुन्छ ।

उदाहरण : 5 सँग सम्बन्धित अभ्यास

उत्तर : प्रत्येक प्रश्नहरूलाई उदाहरणमा दिइए जस्तै गरी समाधान गर्नुहोस् ।

1. $P_T = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^T$	2. रु. 18,22,500	3. 5%
4. 2 वर्ष	5. रु. 6,00,000	4. रु. 1,75,000

उदाहरण : 6 सँग सम्बन्धित अभ्यास

उत्तर :

1. $24300 = 30000(1 + \frac{R_0}{100})T$ बाट $(\frac{9}{10})^2 = (\frac{9}{10})^T$ हुन्छ, $T = 2$ वर्ष

2. $1215000 = 15000000(1 - \frac{10}{100})T$ बाट $T = 2$ वर्ष हुन्छ ।

3. $84100 = 90000\ (1 - \frac{r}{100})^2$ बाट $r = 3.3\%$ प्रतिवर्ष ।

6. **सारांश :**

पाठ्यपुस्तकमा भएका प्रश्नहरू समाधान गर्नुहोस् । जनसङ्ख्या वृद्धिको कारण जन्म र बसाइँ सराई हो । आफ्नो छरछिमेकमा अथवा नजिकको पसलहरूमा जनसङ्ख्या वृद्धि र चक्रीय ह्रास के कसरी हुन्छ ? सम्बन्धित व्यक्तिलाई सोधि समूहमा छलफल गर्नुहोस् । जसले गर्दा आफूले पढेका कुराहरूको प्रतिविम्बन हुन्छ ।

एकाई : 5

समतलीय सतह (Plane Surface)

1. **परिचय** :

चर्तुभूज र बहुभूजहरुको क्षेत्रफल पत्ता लगाउन आयत र त्रिभूजको क्षेत्रफलको अवधारणा प्रयोग गर्ने गरिन्छ । समकोणी त्रिभूज बाहेक अरु त्रिभूजहरुको क्षेत्रफल पत्ता लगाउन हिरोनको क्षेत्रफल सम्बन्धी सुत्र प्रयोगमा ल्याइन्छ । यस एकाई अन्तर्गत ज्ञान, बोध, प्रयोग र उच्च दक्षताका प्रश्नहरु सम्बन्धी अभ्यास गरिनेछ ।

2. **सिकाई उपलब्धि** :

यस एकाईको अध्ययनपछि निम्नलिखित सिकाई उपलब्धि हासिल हुने छ ।

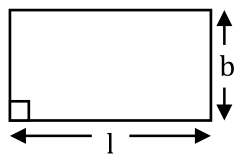
“त्रिभूजको क्षेत्रफल सम्बन्धी समस्याहरु समाधान गर्न ।”

3. **आधारभूत विषयवस्तु** :

आयतको परिमिती = 2 (लम्बाई + चौडाई)

= $2(\ell + b)$ वर्ग एकाई

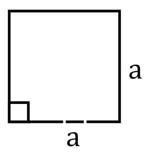
आयतको क्षेत्रफल = ℓ X b वर्ग एकाई



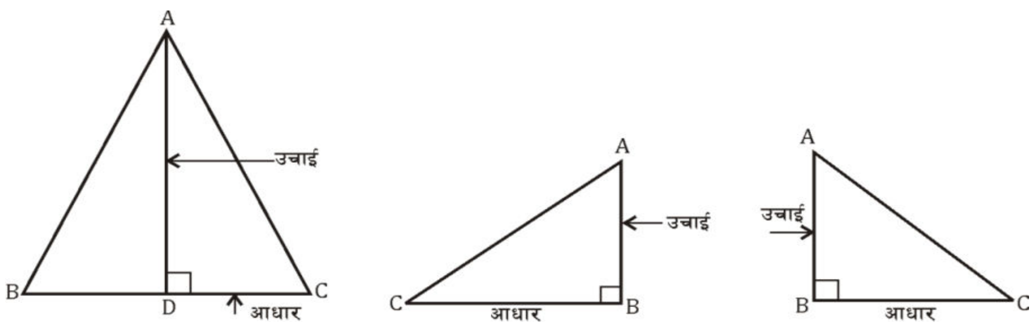
वर्गको परिमिति = 4 X भूजाको लम्बाई

= 4a एकाई

वर्गको क्षेत्रफल = a^2 (भूजा)^2 वर्ग एकाई



बहुभूजलाई विभिन्न त्रिभूजहरुमा विभाजन गरी ती त्रिभूजहरुको भूजाहरुरूको नाप पत्ता लगाइन्छ । यसरी हरेक त्रिभूजको क्षेत्रफल पत्ता लगाई बहुभूजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउन सकिन्छ ।



कुनै त्रिभूजको आधार भूजा र उचाई थाहा भएमा क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार X उचाई वर्ग एकाई हुन्छ ।

4. **मूख्य विषयवस्तुः**

समवाहु, समद्विवाहु र विषमवाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल निम्न अनुसार पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

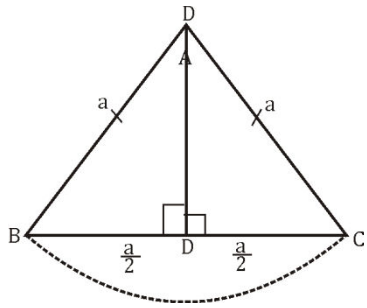
यहाँ, उचाइ भन्नाले लम्बदूरी बुझ्नुपर्दछ । यदि त्रिभुज समबाहु (सबै भुजाहरू बराबर) भएको अवस्थामा यसको क्षेत्रफल निकाल्नुपर्दा, दिइएको त्रिभुज ABC मा

$AB = BC = AC$ हुनाले,

$BC = a$ हुँदा $AC = AB = a$ हुन्छ ।

$AD \perp BC$ खिच्दा,

$BD = CD = ½\ BC = \frac{a}{2}$ लेख्न सकिन्छ ।



अब, समकोण त्रिभुज ADB मा,

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{(a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$\therefore AD = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ हुन्छ ।

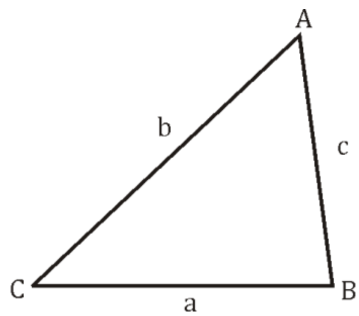
त्यसो भए,

समबाहु ΔABC को क्षेत्रफल

$= ½ \times$ आधार $\times$ उचाइ

$$= \frac{1}{2} \times a \times \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\, a^2$$



त्यसैले,

समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2

यदि विषमबाहु त्रिभुज भएमा, विषमबाहु त्रिभुजका (कुनै पनि भुजाहरू आपसमा बराबर नभएको अवस्थामा) परिमिति $(2s) = a + b + c$

$$\therefore s = \frac{a + b + c}{2}$$

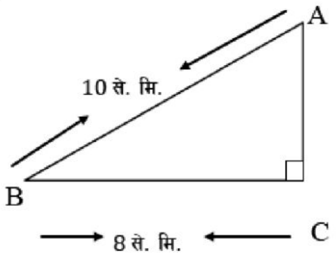
त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल $(A) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ हुन्छ ।

त्रिभुजको तीनओटा भुजाहरूको नाप दिइएको अवस्थामा माथि दिइएको सूत्र प्रयोग गरी सबै किसिमका त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल निकाल्न सकिन्छ ।

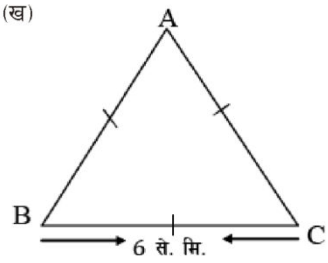
उदाहरण : 1

1. दिइएका नापको आधारमा त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

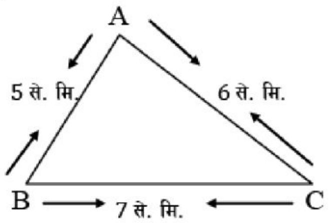
(क)



(ख)



(ग)

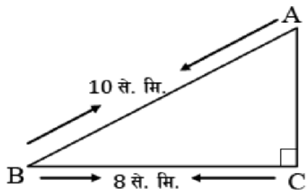


समाधान :

(क) दिइएको त्रिभुज ACB समकोण त्रिभुज हुनाले

$AC=\sqrt{AB^2\text{-}BC^2}=\sqrt{(10)^2\text{-}(8)^2}=\sqrt{100\text{-}64}=\sqrt{36}=6$ से.मि.

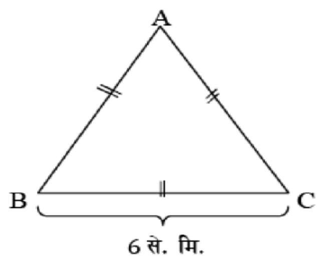
ΔABC को क्षेत्रफल (A) = ½ × आधार × उचाइ



= ½ × 8 से.मि. × 6 से.मि.

= 24 वर्ग से.मि.

(ख) दिइएको ΔABC समबाहु त्रिभुज हुनाले



AB=BC=AC=6 से.मि.

सूत्रानुसार,

ΔABC को क्षेत्रफल (A) $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2

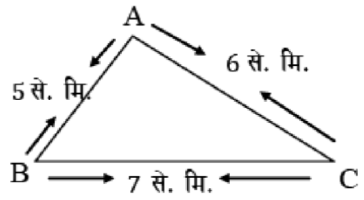
$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times$ (6 से.मि.)^2 $\quad = \frac{\sqrt{3}}{4}\times$ 36 वर्ग से.मि.

$= 9\sqrt{3}$ वर्ग से.मि.

अथवा $A = 15.59$ वर्ग से.मि.

(ग) त्रिभुज ABC विषमबाहु त्रिभुज हुनाले,

$BC(a) = 7$ से.मि.



$AC(b) = 6$ से.मि.

$AB(c) = 5$ से.मि.

सुरुमा अर्धपरिमिति $(S) = \frac{a+b+c}{2}$

$= \left(\frac{7+6+5}{2}\right)$ से.मि. $\quad = \frac{18}{2} = 9$ से.मि.

अब, त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल $(A) = \sqrt{s(s\text{-}a)(s\text{-}b)(s\text{-}c)} \quad = \sqrt{9(9\text{-}7)(9\text{-}6)(9\text{-}5)}$

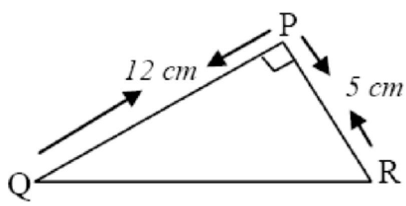
$= \sqrt{9\times2\times3\times4}$ वर्ग से.मि. $\quad = 3\times2\sqrt{6}$ वर्ग से.मि.

$= 6\sqrt{6}$ वर्ग से.मि. $\quad = 14.69$ वर्ग से.मि.

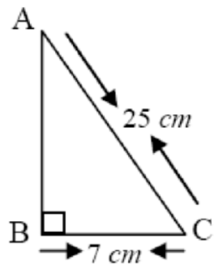
अभ्यास : 1

1. भूजाहरूको नाप a, b, c एकाई भएको त्रिभूजको (क) परिमिति कति हुन्छ ? (ख) क्षेत्रफल कति हुन्छ ?
2. दिइएका त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

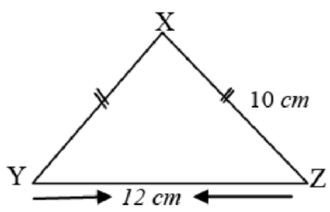
(क)



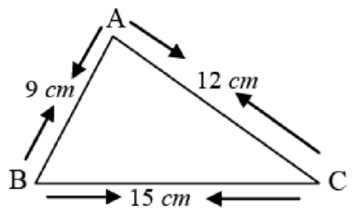
(ख)



(ग)

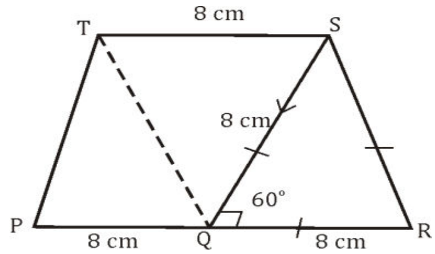


(घ)



उदाहरण : 2

चित्रमा PQST एउटा 8 से.मी. भूजा भएको समवाहु चतुर्भुजका र QRT समवाहु त्रिभूज छ। समलम्व चतुर्भुज PRST को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान :

(i) ΔQRS को क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \ \frac{\sqrt{3}}{4}(8)^2 cm^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} 64 \text{ cm}^2$

$= 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$

(ii) ΔTSQ को क्षेत्रफल $= \Delta QRS$ को क्षेत्रफल

$= 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$ [QRST स.च. भएकोले]

ΔPQT को क्षेत्रफल $= \Delta TQS$ को क्षेत्रफल

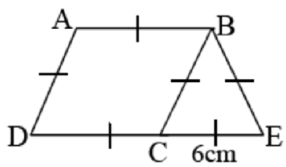
$= 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$ [विकर्ण TQ भएकोले]

स.च. PQST लाई आधा गरेकोले्

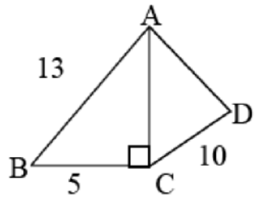
$\therefore$ समलम्व चतुर्भुज PRST को क्षेत्रफल $= 3 \times 16\sqrt{3} \text{ cm}^2 = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$

अभ्यास : 2

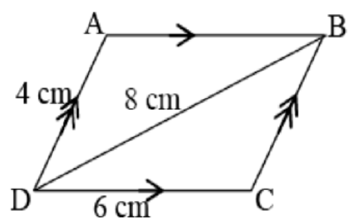
1. समबाहु ΔBCE मा CE=6cm भए समबाहु चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।



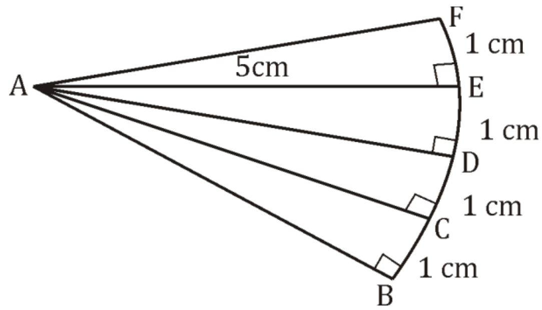
2. समकोण त्रिभुज ABC को भुजा AB=13, BC=5, CD=10 र AC=AD भए ΔACD को क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।



3. AD=4cm, CD=6cm र BD=8cm भए स.च. ABCD को क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

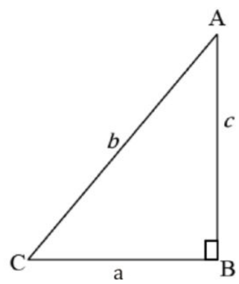


1. **चित्रमा** AE = 5cm **र** FE = ED = CD = BC = 1cm **भए बहुभुज** ABCDEF **को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।**



उदाहरण : 3

कुनै समकोण त्रिभुजको परिमिति 12 से.मि. र क्षेत्रफल 6 वर्ग से.मि. भए सो त्रिभुजको तीनओटै भुजाहरूको नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान :

यहाँ, परिमिति (2s) = 12 से.मि.

अथवा a+b+c = 12 से.मि.

a+c = 12–b .... (i)

क्षेत्रफल (A) = ½ × ac

अथवा 6×2 = ac

$\therefore$ ac = 12 .... (ii)

फेरि, सँगैको चित्र अनुसार,

$b^2 = a^2 + c^2$ (पाइथोगोरस साध्यअनुसार)

अथवा $b^2 = (a+c)^2 - 2ac$ .... (iii)

अब, सम्बन्ध (i) र (ii) लाई सम्बन्ध (iii) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$b^2 = (12 - b)^2 - 2 \times 12$ [$\because$ a+c = 12–b र ac = 12]

अथवा $b^2 = 144 - 24b + b^2 - 24$

अथवा $24b = 120$

$\therefore$ b = 5 से.मि.

b को मान (i) मा राख्दा

$a + c = 12 - 5$

अथवा $a + c = 7$ से.मि. .... (iv)

सम्बन्ध (ii) र (iv) बाट

$a(7-a) = 12$ $[\because C=7\text{-}a]$

अथवा $a^2 - 7a + 12 = 0$

अथवा $a^2 - 3a - 4a + 12 = 0$

अथवा $(a-3)(a-4) = 0$

$\therefore$ $a = 3$ र 4

अब, a को मान क्रमशः सम्बन्ध (iv) मा राख्दा,

यदि $a = 3$ भए $c = 7-3 = 4$ से.मि.

यदि $a = 4$ भए $c = 7-4 = 3$ से.मि.

अतः ΔABC का तीनओटा भुजाहरू 3 से.मि., 4 से.मि. र 5 से.मि. हुन्छन् ।

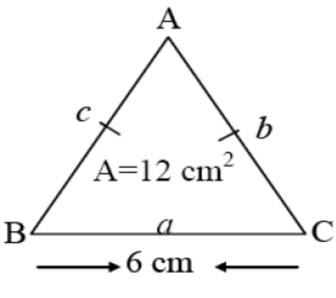
अभ्यास : 3

1. कुनै समकोण त्रिभुजको परिमिति 30 से.मि. र क्षेत्रफल 30 वर्ग से.मि. भए सो त्रिभूजका तिन ओटै भूजाहरु पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. एउटा समकोणी त्रिभुजको कर्ण 74 से.मि. छ र यसको एउटा भूजा 24 से.मि. छ । त्रिभूजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. कुनै समकोणी त्रिभुजको सबभन्दा लामो भूजा 26 से.मि., परिमिति 50 से.मि. र क्षेत्रफल 120 वर्ग से.मि. भए बाँकी दुई भुजाहरु पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. एउटा त्रिभुजका भुजाहरू 3:4:5 को अनुपातमा र परिमिति 72 cm भए सो त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

उदाहरण : 4

कुनै समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल 12 वर्ग से.मि. र आधारको भुजाको लम्बाइ 6 से.मि. भए बाँकी दुई बराबर भुजाको लम्बाइ कति हुन्छ ?

समाधान :



ΔABC मा, (चित्रमा)

BC (a) = 6 से.मि.

AB=AC=b=?

क्षेत्रफल (A) = 12 वर्ग से.मि.

सुरुमा, $2s = a + b + c$

अथवा $s = \frac{6+2b}{2} [b = c]$

अथवा $s=3+b$ $(\text{क्षेत्रफल})^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$

अथवा $(12)^2 = (3+b)(3+b-6)(3+b-b)(3+b-b)$ $[\because b=c]$

अथवा $144 = (3+b)(b-3)9$

अथवा $\frac{144}{9} = b^2 - 9$

अथवा $16+9 = b^2$

अथवा $25 = b^2$

$\therefore b = 5$ से.मि.

अतः $b=5$ से.मि.र $c=5$ से.मि. $[\because b=c]$

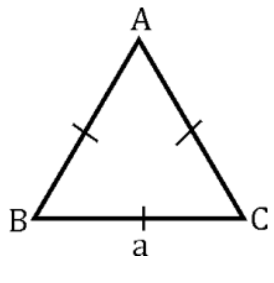
उक्त त्रिभुजका बाँकी दुई भुजाहरू प्रत्येक 5 से.मि. का छन् ।

अभ्यास : 4

1. एउटा समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल 192 वर्ग से.मि. र यसका दुई बराबर भुजाहरूको नाप 20 से.मि. छ भने तेस्रो भुजाको नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. एउटा समद्विबाहु त्रिभुजको आधारको भुजाको लम्बाइ 48 से.मि. र यसको क्षेत्रफल 168 वर्ग से.मि. भए बराबर भुजाको नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. एउटा समद्विवाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल 60 वर्ग से.मि. छ र यसको दुई बराबर भुजाहरु 13 से.मि. छन् भने बाँकी भुजाको लम्बाई पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण : 5

एउटा समभूज (समवाहु) त्रिभुजको परिमिति 18 से.मि. छ । उक्त त्रिभुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान :

यहाँ, त्रिभूजको परिमिति $= 18$ से.मि.

अथवा, $3a = 18$ cm.

$a = 6$ cm.

त्रिभूजको क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (6 \text{ cm})^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 36 \text{ cm}^2$

$= 9\sqrt{3}$ वर्ग एकाई

अभ्यास : 5

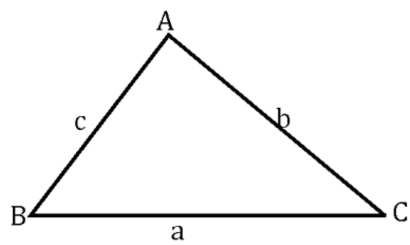
1. एउटा समवाहु त्रिभुजको परिमिति 12 से.मि. छ । उक्त त्रिभुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. एउटा समवाहु त्रिभूजको परिमिति 24 से.मि. छ । उक्त त्रिभूजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. एउटा समवाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ वर्ग से.मि. छ । उक्त त्रिभूजको परिमिति पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण : 6

कुनै त्रिभुजको परिमिति 42 से.मि. र क्षेत्रफल 84 वर्ग से.मि. छन् । यदि एउटा भुजा 13 से.मि. भए बाँकी दुई भुजाहरूको नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, कुनै एउटा भुजा (AB) = c = 13 से.मि., परिमिति (2s) = 42 से.मि.र क्षेत्रफल A =84 वर्ग से.मि.



सुरुमा $2s = 42$ से.मि.

अथवा, $a + b + c = 42$ से.मि.

अथवा, $a + b = 42 - c$

अथवा, $a + b = 42 - 13$

अथवा, $a + b = 29$ से.मि.

$\therefore b = 29 - a$ .... (i)

(त्रिभुजको क्षेत्रफल)^2 $= s(s-a)(s-b)(s-c)$

$(84)^2 = 21(21 - a)\,(21 - b)\,(21 - 13)$

अथवा, $7056=21\times8(21\text{-}a)\,(21\text{-}b)$

अथवा, $\frac{7056}{168} = (21\text{-a})\,(21\text{-b})$

अथवा, $42 = (21 - a)(21 - 29 + a) \quad [\because b=29\text{-}a]$

अथवा, $42 = (21 - a)(a - 8)$

अथवा, $42 = 21a - 168 - a^2 + 8a$

अथवा, $a^2 - 29a + 168 + 42 = 0$

अथवा, $a^2 - 15a - 14a + 210 = 0$

$(a - 15)(a - 14) = 0$

$\therefore a = 15$ र 14

यदि $a = 15$ से.मि. भए $b = 29–15 = 14$ से.मि.

यदि $a = 14$ से.मि. भए $b = 29–14 = 15$ से.मि.

अतः त्रिभुजका बाँकी दुई भुजाहरू 14 से.मि. र 15 से.मि. छन् ।

अभ्यास : 6

1. एउटा त्रिभूजको परिमिति 84 से.मि. र क्षेत्रफल 336 वर्ग से.मि. छन् । यदि एउटा भुजा 30 से.मि. छ भने बाँकी भुजाहरुको नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. एउटा तिनकुने जग्गाको परिमिति 1020 मि. र क्षेत्रफल 3570 वर्ग मि. छ । यदि एउटा किनारा 20 मि. छ भने बाँकी किनाराहरुको नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. एउटा त्रिभुजको परिमिति $\frac{7}{2}$ मि. छ । यदि यसको क्षेत्रफल $\frac{7}{2}$ वर्ग मि. र एउटा भुजा $\frac{13}{12}$ मि. छ भने बाँकी दुई भुजाहरुको नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. **पृष्ठपोषण**

उदाहरण : 1 **सँग सम्बन्धित अभ्यासः**

1. (क) परिमिति (s) $= \frac{a+b+c}{3} = \sqrt{s(s\text{-}a)\,(s\text{-}b)\,(s\text{-}c)}$

2. (क) क्षे.फ. $= \frac{1}{2} PR \times PQ = 30cm^2$

   (ख) क्षे.फ. $= \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} \times 24 \times 7 = 84cm^2$ $(AB = \sqrt{25^2 - 7^2}cm)$

   (ग) उचाई $= \sqrt{10^2 - 6^2} = 8cm$, क्षे.फ. $= \frac{1}{2} \times 8 \times 12cm^2 = 48cm^2$

(घ) (9, 12, 15) ले समकोण त्रिभूज बनाउँछन् । त्रिभूजको क्षे.फ. $= \frac{1}{2} \times 9 \times 12 =$ $54cm^2$

उदाहरण : 2 सँग सम्बन्धित अभ्यासः

1. AC जोडौँ यहाँ ΔBCE को क्षे.फ. $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (6)^2 cm^2 = 9\sqrt{3} cm^2$

   $\Delta ABC + \Delta ADC$ को क्षे.फ. $= 2 \times \Delta BCE$ को $= 18\sqrt{3} cm^2$

2. $AC = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ एकाई / ΔACD को क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

   सूत्र प्रयोग गरी पत्ता लगाउनुहोस् । BACD को क्षे.फ. $= 54.54$ वर्ग एकाई

3. AC = 6cm, ΔADC को क्षे.फ. $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ सूत्र प्रयोग गरि पत्ता लगाउनुहोस् । स.च. ABCD को क्षेत्रफल $= 2 \times \Delta ADC$ को क्षे.फ. $= 23.32$ वर्ग से.मि.

4. $AF = \sqrt{5^2 + 1^2} cm$, $AD = \sqrt{5^2 - 1^2} cm$, $AC = \sqrt{4^2 - 1^2} cm$

   $AB = \sqrt{AC^2 - 1^2} cm$ गरी प्रत्येक भुजा पत्ता लगाउनुहोस् । प्रत्येक Δ को क्षेत्रफल $\frac{1}{2}$ आधार $\times$ उचाई सूत्र प्रयोग गरी पत्ता लगाउनुहोस् । बहुभुज ABCDEF को क्षे.फ. . त्रिभूजहरुको क्षेत्रपष्लको योगफल $= 9.69$ वर्ग से.मि.

उदाहरण : 3 सँग सम्बन्धित अभ्यास

1. क्षेत्रफल, $\frac{1}{2} pb = 30$ र $p+b+h = 30$ तथा $h^2 = p^2 + b^2$ सम्बन्ध प्रयोग गरि p, b र h को मान पत्ता लगाउनुहोस् । p, b र h को मान 5 से.मी, 12 से.मी. र 13 से.मि. हुन्छ ।

2. तेस्रो भुजा $= \sqrt{74^2 - 24^2} cm$

   क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 24 \times$ तेस्रो भूजा

   $= 840$ वर्ग से.मि.

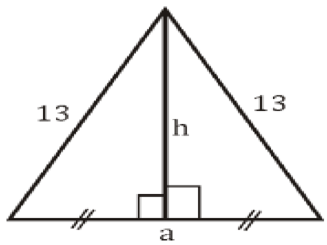
3. (1) को जस्तै गरि समाधान गर्ने । (उत्तरः 24 से.मी. र 10 से.मी.)

4. $3x + 4x + 5x = 72$, अथवा $x = 6$, त्यसैले क्षे.फ. $= \frac{1}{2} \times 18 \times 24 cm^2 = 216 cm^2$ हुन्छ ।

उदाहरण : 4 सँग सम्बन्धित अभ्यास

1. उदाहरण (4) मा जस्तै गरी समाधान गर्नुहोस् । तेस्रो भुजाको 24 से.मी. हुन्छ ।
2. उदाहरण (4) जस्तै गरी समाधान गर्नुहोस् । तेस्रो भुजाको नाप 25 से.मी. हुन्छ ।
3. उचाई (h) = $\sqrt{13^2 - \frac{a^2}{4}}$ [a भनेको आधारको लम्बाई]

   क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\sqrt{169 - \frac{9^2}{4}} \times a$ बाट $a = 12$ से.मी.



उदाहरण : 5 सँग सम्बन्धित अभ्यास

(1) $3a = 12$ अथवा $a = 4$ cm,

क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (4)^2 = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

(2) उदाहरणमा दिइए जस्तै समाधान गर्नुहोस् । क्षेत्रफल $= 16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{25\sqrt{5}}{4}$ बाट $a = 5$ से.मी. हुन्छ ।

त्यसैले परिमिति = 15 से.मी. हुन्छ ।

उदाहरण : 6 सँग सम्बन्धित अभ्यास

(1) उदाहरणमा (6) मा दिइए जस्तै गरी समाधान गर्नुहोस् । बाँकी भूजाहरू लम्बाई 26 से.मी. र 28 से.मी. हुन्छ ।

(2) उदाहरण (6) मा दिइए जस्तै गरी समाधान गर्नुहोस् । बाँकी भुजाहरू 493 मी. र 507 मि. हुन्छ ।

(3) उदाहरण (6) मा दिइए जस्तै गरी समाधान गर्नुहोस् । बाँकी भुजाहरूले लम्बाई $\frac{7}{6}$ मि. र $\frac{5}{4}$ मि. हुन्छ ।

6. **सारांश :**

त्रिभूजको क्षेत्रफल र परिमितिसँग सम्बन्धित प्रश्नहरू आफ्नो दैनिक जीवनमा कहाँ कहाँ प्रयोग हुन्छ, छलफल गर्नुहोस् । हिरोनको सूत्र $s = \frac{a+b+c}{2}$ र $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ प्रयोग गरी जुनसुकै त्रिभूजको पनि क्षेत्रफल समाधान गर्न सकिन्छ । कुनै पनि प्रश्न समाधान गर्दा चित्र बनाएर समाधान गर्नुहोस् । कक्षा १० मा सोधिएका पुराना प्रश्नहरू समाधान गर्नुहोस् ।

एकाई : 6

बेलना र गोला (Cylinder and Sphere)

1. **परिचय** :

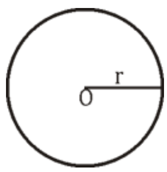
यस एकाई अन्तर्गत बेलना, गोला, सोली र अर्धगोला जस्ता वस्तुहरूको वक्र सतहको क्षेत्रफल, पूरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन सम्बन्धी समस्याहरू सम्बन्धी छलफल गरिने छ । त्यस्तै माथिका कुनै दुई फरक-फरक ठोसहरूबाट बनेका संयुक्त ठोसका बारेमा पनि छलफल गरिने छ । अति छोटो उत्तर आउने (ज्ञानसँग सम्बन्धित) छोटो उत्तर आउने (बोधसँग सम्बन्धित), लामो उत्तर आउने प्रयोग तथा उच्च दक्षतासँग सम्बन्धित प्रश्नहरू यो एकाई अन्तर्गत समाधान गरिने छन् ।

2. **सिकाई उपलब्धि** :

यस एकाईको अध्ययन पछि निम्न लिखित सिकाई उपलब्धिहरू हासिल हुने छन् ।

- "विभिन्न आकारका ठोस वस्तुहरू (बेलना, गोला, अर्धगोला र सोली) को सतहको क्षेत्रफल र आयतन सम्बन्धी समस्याहरू समाधान गर्न ।"
- "कारखाना निर्माण कार्य जस्ता अवस्थामा उल्लेखित ज्यामितीय वस्तु वा आकारहरूका गुणको प्रयोगबाट आवश्यक परिमाणको अनुमान, लागत अनुमान जस्ता समस्याको सङ्कलन र समाधान गर्न ।"

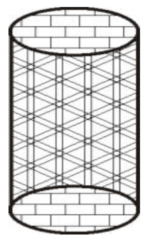
3. **आधारभूत विषयवस्तु** :



- कुनै वृत्तको अर्धव्यास 'r' भए यसको क्षेत्रफल πr^2 र परिधि $2\pi r$ हुन्छ ।
- यदि प्रति इँटा, ढुङ्गा अथवा प्रति मिटर, वर्गमिटर, घनामिटरको खर्च दिइएको अवस्थामा, जम्मा लाग्ने खर्च (T) = वस्तुहरूको सङ्ख्या (N) × एकाई मूल्या/क्षेत्रफल (a) हुन्छ ।

4. **मुख्य विषय वस्तु**

बेलना (Cylinder)



आधारको अर्धव्यास (r) र उचाई (h) दिइएको अवस्थामा

(क) आयतन = आधारको क्षेत्रफल × उचाई/लम्बाई

$= \pi r^2/\pi r^2 \ell$

(ख) वक्र सतहको क्षेत्रफल

= वृत्तको परिधि × उचाई

$= 2\pi rh / \pi dh$, जहाँ d (व्यास) $= 2r$

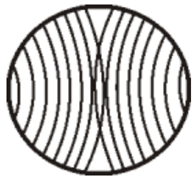
(ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल

$= $ वक्र सतहको क्षेत्रफल $+ 2$ ओटा वृत्ताकार (आधार) को क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h + r)$

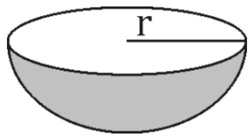
गोला (sphere) : यदि गोलाको व्यास (d) र अर्धव्यास (r) दिइएको अवस्थामा,



(क) आयतन (v) $= \frac{4}{3}\pi r^3$ अथवा $\frac{1}{6}\pi d^3$

(ख) पूरा सतहको क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$ अथवा πd^2

आधारको अर्धव्यास (r) र व्यास (d) दिइएको अवस्थामा अर्धगोलाको,

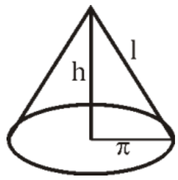


(क) आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{1}{12}\pi d^3$

(ख) वक्र सतहको क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi d^2$

(ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल $= 3\pi r^2 = \frac{3}{2}\pi d^2$

अर्ध गोलाको आधारलाई "Great Circle" पनि भनिन्छ ।



सोली (Cone) : आधारको अर्धव्यास (r), उचाई (h) र छड्के उचाई (ℓ) को सम्बन्ध $\ell^2 = h^2 + r^2$ भएको सोलीलाई "right circular cone" भन्दछन् । उक्त सोलीको

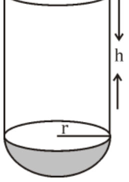
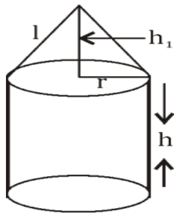
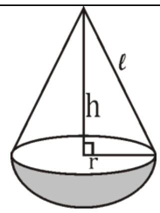
(क) आयत (v) $= \frac{2}{3}$ आधारको क्षेत्रफल $\times$ उचाई $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

(ख) वक्र सतहको क्षेत्रफल $=$ आधारको अर्ध परिमिति $\times$ छड्के उचाई $= \pi r\ell$

(ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल $=$ आधारको क्षेत्रफल $+$ वक्र सतहको क्षेत्रफल

$= \pi r^2 + \pi r\ell = \pi r(r + \ell)$

संयुक्त ठोस (Combined solid)

(क) बेलना र अर्धगोला	(ख) बेलना र सोली	(ग) सोली र अर्धगोला
		
● आयतन = बेलनाको आयतन + अर्धगोलाको	● आयतन=बेलनाको आयतन + सोलीको आयतन	● आयतन = सोलीको आयतन + अर्ध गोलाको

आयतन $= \pi r^2h + \frac{2}{3}\pi r^3$ ● वक्र सतहको क्षेत्रफल = वेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल + अर्ध गोलाको वक्र सतहको क्षेत्रफल $= 2\pi rh + 2\pi r^2$ ● पूरा सतहका क्षेत्रफल = वेलना र गोलाको वक्र सतहको क्षेत्रफल + आधारको क्षेत्रफल $= 2\pi rh + 2\pi r^2 + \pi r^2$ $= 2\pi rh + 3\pi r^2$	$= \pi r^2h + \frac{1}{3}\pi r^2h_1$ ● वक्र सतहको क्षेत्रफल = सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल + वेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल $= \pi r\ell + 2\pi rh$ ● पूरा सतहको क्षेत्रफल = वक्र सतहको क्षेत्रफल + आधारको क्षेत्रफल $= \pi r\ell + 2\pi rh + \pi r^2$ ● टेण्टको काम गरेमा- वक्र सतहको क्षेत्रफल = पूरा सतहको क्षेत्रफल हुन्छ ।	आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2h + \frac{2}{3}\pi r^3$ ● पूरा सतहको क्षेत्रफल = सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल + अर्ध गोलाको वक्र सतहको क्षेत्रफल $= \pi r\ell + 2\pi r^2$

उदाहरण : 1

1. दिइएको बेलनाको

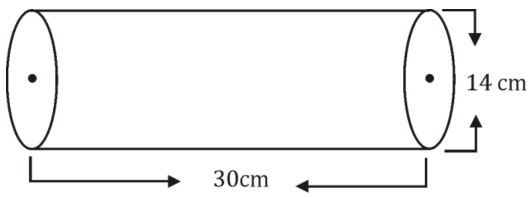
   (i) आधारको परिधि

   (ii) आधारको क्षेत्रफल

   (iii) वक्र सतहको क्षेत्रफल

   (iv) पूरा सतहको क्षेत्रफल

   (v) आयतन निकाल्नुहोस् ।



समाधान :

(i) आधार वृत्ताकार भएकोले परिधि (C) $= 2\pi r$ or πd

$= \frac{22}{7} \times 14$ से.मि. $= 44$ से.मि.

(ii) आधारको क्षेत्रफल (A) $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \quad [d = 2r]$

$= 154$ वर्ग से.मि.

(iii) वक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA) $= 2\pi rh$ or πdh

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 30$ वर्ग से.मि.

$= 1,320$ वर्ग से.मि.

(iv) पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) $= 2\pi r\,(r+h)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7\,[7+30]$$

$$= 44 \times 37$$

$= 1,628$ वर्ग से.मि.

(v) आयतन (v) $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 30$ घ.से.मि.

$= 4,620$ घ.से.मि.

अभ्यास : 1

1. (क) आधारको अर्धव्यास (r) र उचाई (h) भएको बेलनाको आयतन कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

   (ख) बेलनाको पूरा सतहको क्षेत्रफलको सूत्र लेख्नुहोस् ।

   (ग) बेलनाको आधारको परिधि 'x' एकाई र उचाई 'y' एकाई भए वक्र सतहको क्षेत्रफल x र y को रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

2. अर्धव्यासको तेब्बर उचाई भएको कुनै बेलनाको आयतन 3234 cm^2 भए वक्र सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. अर्धव्यासको दोब्बर उचाई भएको बेलनाको उचाई 20cm भए आधारको परिधि, क्षेत्रफल, बक्र सतहको क्षेत्रफल, पूरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस् ।

4. एउटा बेलनाको अर्धव्यास र उचाइको योगफल 37 से.मि. यसको परिधि 44 से.मि. भए, सो बेलनाको

   (i) आधारको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

   (ii) वक्र सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

   (iii) पूरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

   (iv) आयतन निकाल्नुहोस् ।

उदाहरण : 2

(क) अर्धव्यास 3.5 cm भएको कुनै गोलाको सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, अर्धव्यास (r) = 3.5 cm

सतहको क्षेत्रफल (TSA) $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5$

$= 154 \text{ cm}^2$

नोट : १. गोलाको वक्रसतहको क्षेत्रफल, सतहको क्षेत्रफल वा पूरा सतहको क्षेत्रफल उही हुन्छ ।

२. अर्धगोलाको वक्रसतहको क्षेत्रफल निकाल्न TSA= $2\pi r^2$ सूत्र प्रयोग गर्नु पर्दछ ।

(ख) अर्धव्यास 0.5 से.मि. भएको एउटा गोलाको आयतन निकाल्नुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, अर्धव्यास (r) = 0.7 से.मि.

आयतन (V) $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 0.7 \times 0.7 \times 0.7$

$= 1.43 \text{ cm}^3$

[नोट : अर्धगोलाको आयतन निकाल्न $V = \frac{2}{3}\pi r^3$ सूत्र प्रयोग गर्नु पर्दछ ।]

(ग) एउटा बल (गोलाकार) को आयतन 38808 घ.से.मि. छ भने यसको सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, सर्वप्रथम अर्धव्यास पत्ता लगाउनु पर्ने हुन्छ ।

यहाँ, आयतन (V) = 38808 घ.से.मि.

अथवा, $\frac{4}{3}\pi r^3 = 38808$ घ.से.मि.

अथवा, $4 \times \frac{22}{7} \times r^3 = 38808$

अथवा, $r^3 = \frac{3 \times 38808 \times 7}{4 \times 22}$

अथवा, $r^3 = 9261$ घ.से.मि.

अथवा, $(r)^3 = (21)^3$

$\therefore r = 21$ से.मि.

सतहको क्षेत्रफल (A) = $4\pi r^2$ वर्ग से.मि.

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ वर्ग से.मि.

$= 5544$ वर्ग से.मि.

(घ) एउटा गोलाकार वस्तुलाई ठिक बिचमा काट्दा बन्ने वृत्तको परिधि 44 से.मि. छ भने सो वस्तुको (i) सतहको क्षेत्रफल (ii) आयतन निकाल्नुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, परिधि $(C) = 2\pi r = 44$ से.मि.

अथवा, $r = \frac{44}{2\pi}$

$= \frac{44 \times 7}{2 \times 22}$

$= 7$ से.मि.

(i) सतहको क्षेत्रफल (A) $= 4\pi r^2$ वर्ग से.मि.

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7^2$

$= 616$ वर्ग से.मि.

(ii) आयतन (V) $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$ घ.से.मि.

$= \frac{4312}{3}$

$= 1437.33$ घ.से.मि.

अभ्यास : 2

1. (क) अर्धव्यास 'x' एकाई दिइएको अवस्थामा गोलाकार वस्तुको आयतन कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

   (ख) व्यास 'd' एकाई दिइएको अवस्थामा गोलाकार वस्तुको पुरा सतहको क्षेत्रफलको सुत्र के हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

2. अर्धव्यास 10 से.मि. भएको गोलाको पूरा सतहको क्षेत्रफल कति होला ?

3. अर्धव्यास 14 से.मि. भएको गोलाको आयतन निकाल्नुहोस् ।

4. एउटा गोलाकार वस्तुको सतहको क्षेत्रफल 5544 वर्ग से.मि. भए सो वस्तुको परिधि कति होला ?

5. एउटा ठोस गोलाकार वस्तुलाई बराबर दुई भाग हुने गरी बनाइएको दुई अर्ध गोलाकार वस्तुहरूको पूरा सतहको क्षेत्रफल 3696 वर्ग से.मि. छ भने सुरुको गोलाकार वस्तुको आयतन कति थियो होला ?

6. एउटा गोलाकार वस्तुको सतहको क्षेत्रफल 5544cm² भए आयतन कति होला ?

7. एउटा गोलाको ठूलो वृत्तको परिधि 88cm भए यसको पूरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 3 :

(क) पूरा सतहको क्षेत्रफल 462 cm² भएको कुनै अर्धगोलकार वस्तुको अर्धव्यास निकाल्नुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, अर्धगोलाको पुरासतहको क्षेत्रफल (TSA) = 462 cm²

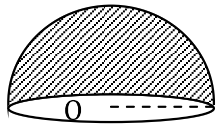
अथवा, $462 = 3\pi r^2$

अथवा, $\frac{462\times7}{3\times22} = r^2$

$\therefore r = 7$ से.मि.

(ख) छेउमा दिइएको ठोस अर्धगोलाको अर्धव्यास 3.5 से.मि. छ । सो वस्तुको (i) वक्र सतहको क्षेत्रफल (ii) पूरा सतहको क्षेत्रफल (iii) आयतन निकाल्नुहोस् ।

समाधान :



(i) अर्धव्यास (r) = 3.5 से.मि.

वक्रसतहको क्षेत्रफल (CSA) $= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5$ वर्ग से.मि.

$= 77$ वर्ग से.मि.

(ii) पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) $= 3\pi r^2$

$= 3 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5$ वर्ग से.मि.

$= 115.5$ वर्ग से.मि.

(iii) आयतन (V) $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5$ घ.से.मि.

$= 89.83$ घ.से.मि.

अभ्यास : 3

1. (क) अर्ध गोलाकार वस्तुको अर्धव्यास 'r' एकाई दिइएको अवस्थामा पूरा सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

(ख) अर्धगोलाकार वस्तुको अर्धव्यास 'x' एकाई दिइएको अवस्थामा आयतन कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

2. अर्धव्यास 14 से.मि. भएको अर्धगोलाको वक्र सतहको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

3. व्यास 1.4 से.मि. भएको अर्धगोलाको पूरा सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ निकाल्नुहोस् ।

4. पूरा सतहको क्षेत्रफल 1848 वर्ग से.मि. भएको अर्धगोलाको अर्धव्यास कति होला ?

5. आयतन 19.404 घन से.मि. भएको कुनै अर्धगोलाको अर्धव्यास निकाल्नुहोस् ।

उदाहरण : 4

(क) एउटा गोलाकार वस्तुको सतहको क्षेत्रफल 2π वर्ग से.मि. छ । यसको अर्धव्यासलाई आधा गर्दा क्षेत्रफलमा कति फरक हुन्छ निकाल्नुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, गोलाको सतहको क्षेत्रफल (A) $= 2\pi$ वर्ग से.मि.

$\therefore 4\pi r^2 = 2\pi$ वर्ग से.मि.

अथवा, $r^2 = \frac{2\pi}{4\pi}$

अथवा, $r^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

प्रश्नअनुसार, अर्धव्यासलाई आधा गर्दा,

$r_1 = \frac{1}{2} \times r$

$r_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}$ से.मि.

क्षेत्रफल $(A_1) = 4\pi r_1^2$

$= 4\pi \times \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2$

$= 4\pi \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2}$ वर्ग से.मि.

दुई सतहको क्षेत्रफलमा हुने फरक

$A_2 = A - A_1$

$= 2\pi - \frac{\pi}{2}$

$= \frac{3\pi}{2}$ वर्ग से.मि.

(ख) एउटा गोलाकार वस्तुको व्यासलाई तेब्बर गर्दा आयतनमा कति गुणा फरक आउँछ निकाल्नुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, मानौँ गोलाको व्यास (d) = x एकाइ

आयतन (V) $= \frac{\pi d^3}{6}$

$= \frac{\pi x^3}{6}$ …………… (i)

प्रश्नअनुसार, व्यासलाई तेब्बर गर्दा $(d_1) = d \times 3$

$= x \times 3 = 3x$ एकाइ

आयतन (V_1) $= \frac{\pi {d_1}^3}{6}$

$= \frac{\pi \times (3x)^3}{6} = \frac{\pi \times 27x^3}{6}$

$= \frac{27\pi x^3}{6}$ ……………… (ii)

अब, प्रश्नअनुसार आयतनहरूको फरक $= \frac{27\pi x^3}{6} - \frac{\pi x^3}{6}$

$= \frac{\pi x^3}{6}(27 - 1) = \frac{\pi x^3}{6} \times 26$

सुरुको आयतनमा 26 गुना फरक आउँदछ ।

(ग) तीनओटा चाँदीको गोलाकार वस्तुहरूको अर्धव्यास क्रमशः 2 से.मि., 12 से.मि. र 16 से.मि. छन् । उक्त तीनओटा गोलाकार वस्तुहरूलाई पगालेर एउटा गोलाकार वस्तु बनाइयो भने सो वस्तुको व्यास कति से.मि. होला ?

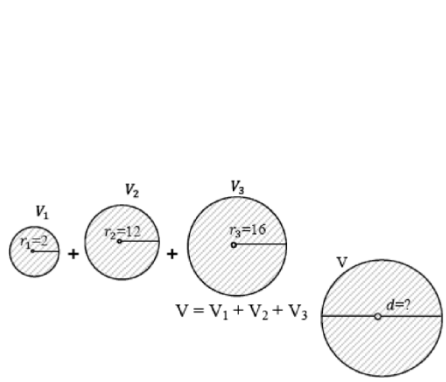
समाधान :

प्रश्नअनुसार,

अथवा, $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi {r_1}^3 + \frac{4}{3}\pi {r_2}^3 + \frac{4}{3}\pi {r_3}^3$

अथवा, $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi({r_1}^3 + {r_2}^3 + {r_3}^3)$

अथवा, $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi[(2)^3 + (12)^3 + (16)^3]$



अथवा, $r^3 = (8 + 1728 + 4096)$ घ.से.मि.

अथवा, $r^3 = 5832$ घ.से.मि.

अथवा, $(r)^3 = (18)^3 \therefore r = 18$ से.मि.

अभ्यास : 4

1. कुनै एउटा गोलाकार वस्तुको सतहको क्षेत्रफल $\frac{2\pi}{3}$ वर्ग से.मि. छ । यसको अर्धव्यासलाई दुई तिहाइ गर्दा हुने सतहको क्षेत्रफल र सुरुको सतहको क्षेत्रफलमा कति फरक आउला, निकाल्नुहोस् ।
2. एउटा गोलाकार वस्तुको व्यासलाई एक तिहाइ गर्ने हो भने, यसको आयतनमा कति गुणा फरक आउला ?
3. 1 से.मि., 6 से.मि. र 8 से.मि. अर्धव्यास भएका तीनओटा फलामको गोलाकार वस्तुहरूलाई पगालेर एउटा सिङ्गो गोलाकार वस्तु बनाइएको छ भने, सो सिङ्गो वस्तुको सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण : 5 (नोटः सोली पिरामिड भएपनि यसलाई एउटै आधार भएको अवस्थामा बेलना र अर्धगोलासँग मिलाएर संयुक्त ठोस बनाउन सकिन्छ । त्यसैलाई यसै एकाईमा समेटिएको छ ।)

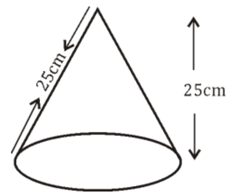
छेउको चित्रमा दिइएको सोली आकारको वस्तुको छड्के उचाई 25 से.मी. र उचाई 24 से.मी. छ । पत्ता लगाउनुहोस् ।

i. अर्धव्यास

ii. आयतन

iii. वक्र सतहको क्षेत्रफल

iv. पूरा सतहको क्षेत्रफल



समाधान :

i. यहाँ, उचाई (h) = 24cm, छड्के उचाई (ℓ) = 25cm, अर्ध व्यास (r) = ?

हामीलाई थाहा छ, $\ell^2 = h^2 + r^2$

अथवा, $(25)^2 = (24)^2 + r^2$

अथवा, $625 = 576 + r^2$

अथवा, $625 - 576 = r^2$

अथवा, $49 = r^2$

अथवा, $\sqrt{49} = r$

अथवा $r = 7$ से.मी.

ii. आयतन (V) $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7}\ 7^2 \times 24$

$= 1232 cm^3$

iii. वक्र सतहको क्षेत्रफल (V) $= \pi r \ell$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25^2$

$= 550\ cm^2$

iv. पूरा सतहको क्षेत्रफल (V) $= \pi r(r + \ell)$

$= \frac{22}{7} \times 7(7 + 25)$

$= 22 \times 32 cm^2$

$= 704 cm^2$

अभ्यास : 5

1. (क) आधारको अर्धव्यास 'r' एकाई र उचाई 'h' दिइएको अवस्थामा सोली आकारको वस्तुको आयतन कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

   (ख) सोली आकारको वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफलको सूत्र लेख्नुहोस् ।

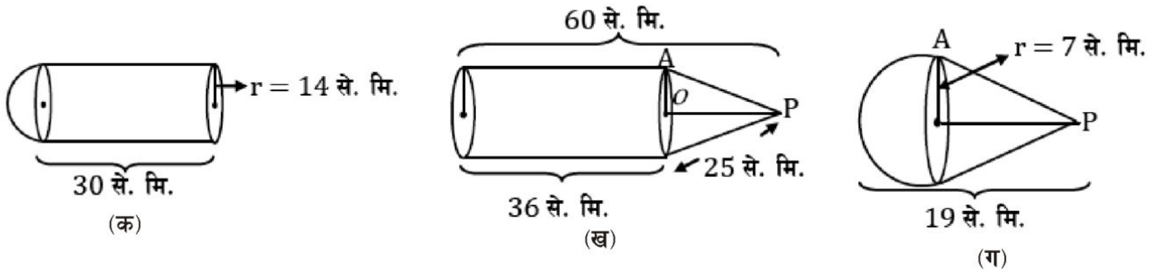
2. एउटा सोलीको आधारको अर्धव्यास 7 से.मी. र उचाई 21 से.मी. भए त्यसको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. एउटा सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल 550 वर्ग से.मी. र छड्के उचाई 25 से.मी भए उक्त सोलीको उचाई पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. एउटा सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल र वक्र सतहको क्षेत्रफल क्रमशः 704 वर्ग से.मी. र 550 वर्ग से.मी. भए सो सोलीको उचाई पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण : 6

दिइएको ठोसवस्तुको पूरासतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान :

पूरासतहको क्षेत्रफल (TSA) = $2\pi r^2 + 2\pi rh + \pi r^2$

$= \pi r[2r + 2h + r]$

$= \frac{22}{7} \times 14[2 \times 14 + 2 \times 30 + 14]$

$= 44[28 + 60 + 14]$

$= 44 \times 102$

$= 4488$ वर्ग से.मि.

आयतन (V) $= \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$

$= \pi r^2 \left[\frac{2}{3}r + h\right]$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \left[\frac{2}{3} \times 14 + 30\right]$

$= 616 \times \frac{118}{3} = 24229.33$ घ.से.मि.

$\because$ अर्धगोलाको वक्रसतहको क्षेत्रफल (A)= $2\pi r^2$

बेलनाको वक्रसतहको क्षेत्रफल (CS) = $2\pi rh$

वृत्तको क्षेत्रफल (A) = πr^2

$\because$ अर्धगोलाको आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

बेलनाको आयतन $= \pi r^2 h$ मा

(ii) **यहाँ,**

सोलीको उचाइ (h) $= 60$ से.मि. $- 36$ से.मि. $= 24$ से.मि.

अर्धव्यास (r) $= \sqrt{AP^2 - OP^2}$

$= \sqrt{625 - 576}$

$= \sqrt{49} = 7$ से.मि.

पूरासतहको क्षेत्रफल (TSA) $= \pi r^2 + 2\pi rh + r\pi\ell$

$= \pi r(r + 2h + \ell)$

$= \frac{22}{7} \times 7(7 + 2 \times 36 + 25)$

$= 22 \times 104$ वर्ग.से.मि. $= 2288$ वर्ग से.मि.

(ख) **यहाँ,**

सोलीको उचाइ (h) $= 60$ से.मि. $- 36$ से.मि. $= 24$ से.मि.

अर्धव्यास (r) $= \sqrt{AP^2 - OP^2}$

$= \sqrt{625 - 576}$

$= \sqrt{49} = 7$ से.मि.

पूरासतहको क्षेत्रफल (TSA) $= \pi r^2 + 2\pi rh + r\pi\ell$

$= \pi r(r + 2h + \ell)$

$= \frac{22}{7} \times 7(7 + 2 \times 36 + 25)$

$= 22 \times 104$ वर्ग.से.मि. $= 2288$ वर्ग से.मि.

(ग) सुरुमा,

सोलीको उचाइ $(h_1) = (19-7)$ से.मि.

$= 12$ से.मि.

AP (छड्के उचाइ)$(\ell) = \sqrt{OA^2 + OP^2}$

$= \sqrt{49 + 144}$

$= \sqrt{193}$ से.मि.

$= 13.89$ से.मि.

पूरासतहको क्षेत्रफल (TSA) $= 2\pi r^2 + \pi r l = \pi r(2r + l)$

$= \frac{22}{7} \times 7(2 \times 7 + 13.89) = 22(14 + 13.89)$

$= (22 \times 27.89)$ वर्ग से.मि.

$= 613{,}58$ वर्ग से.मि.

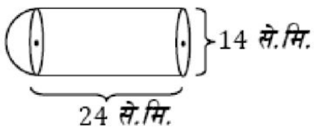
आयतन (V) $= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \pi r^2 \left(\frac{2r}{3} + \frac{h}{3}\right)$

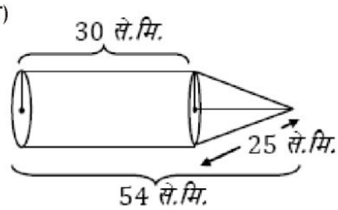
अभ्यास : 6

1. दिइएको संयुक्त ठोस वस्तुको पूरासतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस् ।

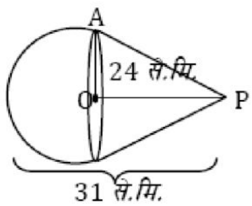
(ख)



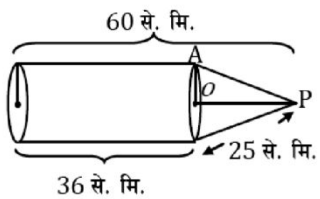
(ख)



(ग)

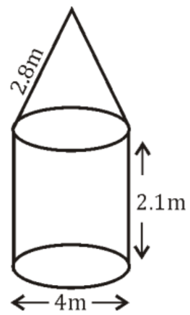


(घ)



उदाहरण : 7

एउटा टेण्टको आकार चित्रमा दिइए जस्तै बेलना र सोली मिली बनेको छ । जहाँ सोली आकारको छड्के उचाई 2.8 मि, बेलनाको उचाई 2.1 मि. र आधारको व्यास 4 मि. छ । उक्त टेण्ट बनाउन कति कपडा आवश्यक पर्छ ? टेण्टको आधारमा कपडा प्रयोग नगर्दा प्रति वर्ग मिटरको रु. 1100 का दरले जम्मा कति रुपियाँको कपडा आवश्यक पर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान :

यहाँ, आधारको अर्धव्यास $= \frac{1}{2} \times 4\text{m} = 2\text{m}$

बेलनाको उचाई $= 2.1m$

सोलीको छड्के उचाई $= 2.8m$

टेण्टमा प्रयोग हुने कपडाको क्षेत्रफल = संयुक्त ठोसको वक्र सतहको क्षेत्रफल

अथवा, कपडाको क्षेत्रफल $= 2\pi rh + \pi r\ell$

$= \pi r(2h + 2)$

$= \frac{22}{7} \times 2(2 \times 2.1 + 2.8)m^2$

$= \frac{22}{7} \times 2 \times 7m^2$

$= 44m^2$

फेरि, $1m^2$ कपडाको जम्मा खर्च = रु. 1100

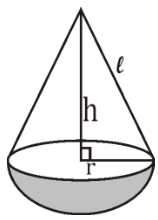
$44m^2$ कपडाको जम्मा खर्च = रु.1100 × 44

= रु. 48,400

अभ्यास : 7

1. एउटा सर्कसमा प्रयोग गरिएको टेण्टको बेलनाको उचाई 3 मिटर र सोलीको छड्के उचाई 53 मिटर छ । उक्त टेण्टको आधारको व्यास 105 मिटर भए टेण्ट बनाउन चाहिने कपडाको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? $1m^2$ को रु. 950 का दरले कपडा किन्दा जम्मा कपडाको कति खर्च लाग्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. एउटा खेलौना चित्रमा दिइए जस्तै सोली र अर्धगोला मिली बनेको छ। उक्त खेलौनाको आधारको अर्धव्यास 3.5 से.मी. र पूरा उचाई 15.5 से.मी. छ । उक्त खेलौनाको पूरा सतहमा रु. 5 प्रति वर्ग से.मी. का दरले रङ लगाउन जम्मा कति खर्च लाग्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



5. **पृष्ठपोषण** :

उदाहरण : 1 सँग सम्बन्धित प्रश्नहरू : सूत्रहरू सम्झेर लेख्नु गर्नुहोस् ।

1. (क) आयतन $= \pi r^2 y$ घन एकाई

   (ख) $2\pi r(r + h) = TSA$

   (ग) $2\pi xy$ वर्ग एकाई

2. उदाहरणमा दिइए जस्तै गरी सुत्र प्रयोग गर्नुहोस् ।

   उत्तर : परिधि = 62.8cm, आधारको क्षेत्रफल = $314.28cm^2$, वक्र सतहको क्षेत्रफल = $1257.41cm^2$, पूरा सतहको क्षेत्रफल = $1885.7cm^2$ र आयतन = $6285.6cm^2$

3. सूत्र प्रयोग गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर : (i) $154 cm^2$ (ii) $1320 cm^2$ (iii) $1628 cm^2$ (iv) $4620 cm^2$

4. सूत्र प्रयोग गरी पत्ता लगाउनुहोस् (अर्धव्यास = x र उचाई 3x मानेर)

उत्तर $924 cm^2$

उदाहरण : 2 सँग सम्बन्धित प्रश्नहरू

1. (क) आयतन $= \frac{4}{3}\pi x^3$ घन एकाई

(ख) सतहको क्षेत्रफल πd^2 वर्ग एकाई

2. उत्तर : 1257.14 वर्ग से.मी. (सूत्र प्रयोग गर्नुहोस् ।)

3. उत्तर : 11498.66 घन से.मी. (सूत्र प्रयोग गर्नुहोस् ।)

4. उत्तर : 1.32 मिटर ($TSA = 4\pi r^2$ बाट प्राप्त r लाई $c = 2\pi r$ मा राख्नुहोस्)

5. उत्तर : $113\frac{1}{7}$ वर्ग से.मी. ($\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{792}{7}$ बाट प्राप्त r लाई $= 4\pi r^2$ मा राख्नुहोस्)

6. उत्तर : 11498.67 घ.से.मी. बाट $6\pi r^2 = 3696$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. उत्तर : $2464 cm^2$, $11498.66 cm^2$

उदाहरण : 3 सँग सम्बन्धित प्रश्नहरू

१. (क) पूरा सतहको क्षेत्रफल $= 4\pi r^3$ घन एकाई

(ख) आयतन $= \frac{2}{3}\pi x^3$ घन एकाई

2. उत्तर : 1232 वर्ग से.मी. ($CSA = 2\pi r^2$ सूत्र प्रयोग गर्नुहोस्)

3. उत्तर : 4.62 वर्ग से.मी. ($TSA = 3\pi r^2$ सूत्र प्रयोग गर्नुहोस्)

4. उत्तर : 1.4 से.मी. ($3\pi r^2 = 1848$ बाट)

5. उत्तर : 2.1 से.मी. ($\frac{2}{3}\pi r^3 = 19.404$ बाट)

उदाहरण : 4 सँग सम्बन्धित प्रश्नहरू

1. उत्तर : $\frac{10\pi}{27} cm^2$ (उदाहरणमा दिइए जस्तै गरी समाधान गर्नुहोस्)

2. उत्तर : $\frac{26}{27}$ गुणा फरक (उदाहरणमा दिइए जस्तै गरी समाधान गर्नुहोस्)

3. उत्तर : $1018.19 cm^2$ (उदाहरणमा दिइए जस्तै गरी समाधान गर्नुहोस्)

उदाहरण : 5 सँग सम्बन्धित प्रश्नहरू

1. (क) आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ घन एकाई

   (ख) पूरा सतहको क्षेत्रफल $= \pi r (r + l)$

2. आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ बाट पत्ता लगाउनुहोस् । (उत्तर : $1078 cm^3$)

3. $\pi rl = 550$ बाट $r = 7$ पत्ता लगाउनुहोस् । $h = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ cm

4. $\pi r^2 = 704 - 550 = 154 cm^2$ अथवा $r = 7cm$

   $\pi rl = 550$ बाट $r = 25cm$, $h = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ cm

उदाहरण : 6 सँग सम्बन्धित प्रश्नहरू

1. उदाहरणमा दिइए जस्तै गरी समाधान गर्नुहोस् ।

   (i) पूरा सतहको क्षेत्रफल $= 1518 cm^2$

   आयतन $= 4414.66 cm^2$

   (ii) पूरा सतहको क्षेत्रफल $= 2948 cm^2$, आयतन $= 5852 cm^3$

   (iii) पूरा सतहको क्षेत्रफल $= 220.86 cm^2$, आयतन $= 9239.99 cm^3$

   (iv) पूरा सतहको क्षेत्रफल $= 818.4 cm^2$, आयतन $= 1745.33 cm^3$

उदाहरण : 7 सँग सम्बन्धित प्रश्नहरू

1. टेण्टको क्षेत्रफल $= 2\pi rh + \pi r\ell = 9735 m^2$

   जम्मा खर्च = रु. 950×9735 = रु. 9248250

2. $\ell = \sqrt{12^2 + (3.5)^2} = 12.5$ cm

   खेलौनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल $= \pi r(r + 2r) = 192.5 cm^2$

   रङको भागको जम्मा खर्च = रु. 5×192.5 = रु. 962.50

7. **सारांश**

बेलना, सोली र गोला आकारका वस्तुहरू हाम्रो दैनिक जीवनमा धेरै प्रयोगमा आइरहेका हुन्छन् । अभ्यासका लागि कक्षा १० को अन्तिम परिक्षा (एस.एल.सी. पुरानै नाम) मा सेधिएका प्रश्नहरूको हल गर्नुहोस् । π को मान $\frac{22}{7}$ र 3.14 राख्दा अथवा धेरै पटक rounding off (शून्य) गर्दा उत्तरमा आंशिक फरक पर्न आउँछ । तर धेरै फरक आउनु हुँदैन । सूत्रहरूलाई राम्रोसँग मनन गर्नुहोस् ।

एकाई : 7

प्रिज्म र पिरामिड (Prism and Pyramid)

1. **परिचय :**

प्रिज्म र पिरामिडहरूमध्ये यस एकाइमा त्रिभूजाकार प्रिज्म र वर्गआधार पिरामिडको सतहहरूको क्षेत्रफल र आयतन सम्बन्धी समस्या अध्ययन गरिनेछ । अभ्यासमा ज्ञानतह, वोधतह, प्रयोग र उच्च दक्षताका प्रश्नहरू क्रमशः अङ्कभार १, २, ४ र ५ भएका समावेश गरिएका छन् ।

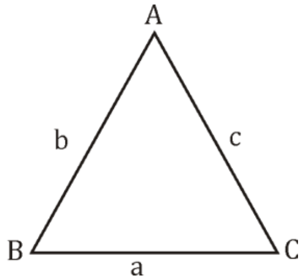
2. **सिकाई उपलब्धि :**

यस एकाईको अध्ययनपछि निम्न लिखित सिकाई उपलब्धि हासिल हुनेछ ।

- "त्रिभूजााकार प्रिज्म र पिरामिडको सतहको क्षेत्रफल र आयतन सम्बन्धी समस्याहरू समाधान गर्न"
- "कारखाना, निर्माण कार्य जस्ता अवस्थामा उल्लेखित ज्यामितीय वस्तु वा आकारका (Geometrical Shapes) गुणहरूको प्रयोगबाट आवश्यक परिमाणको अनुमान जस्ता समस्याहरूको सङ्कलन र समाधान गर्न ।"

3. **आधारभूत विषयवस्तु :**

चित्रमा दिइएको त्रिभुज विषमवाहु त्रिभुज हो जसको भुजाका नापहरू क्रमशः a एकाइ, b एकाइ, c एकाइ छन् ।

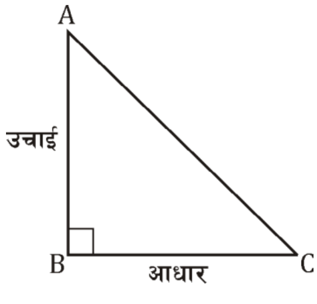


तसर्थ दिइएको त्रिभूजको क्षेत्रफल

$(A) = \sqrt{s(s\text{-}a)\,(s\text{-}b)\,(s\text{-}c)}$ वर्ग एकाई

सूत्रबाट पत्ता लगाउन सकिन्छ । जहाँ $S = \frac{1}{2}(a+b+c)$

अथवा त्रिभूजको अर्ध परिमिति हुन्छ ।



त्यस्तै, समकोणी त्रिभूजको क्षेत्रफल (A)

$= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ उचाई $= \frac{1}{2}bh$ वर्ग एकाइ $= \frac{1}{2}b\times p$ वर्ग एकाइ

समावहु त्रिभूजको भूजाको लम्बाई 'a' एकाई दिइएकोमा

क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

4. **मुख्य विषय वस्तु**

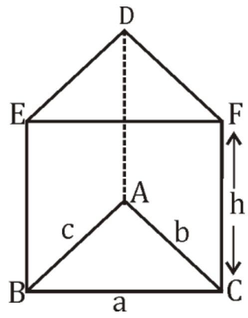
त्रिभूजाकार प्रिज्म (Triangle Prism)

(क) आधारको क्षेत्रफल $= \Delta ABC$ को क्षेत्रफल

(ख) आयताकार सतहहरूको क्षेत्रफल (छड्के सतहको क्षेत्रफल)

$=$ आधारको परिमिति $\times$ प्रिज्मको उचाई/लम्बाई

$= (a + b + c) \times h$

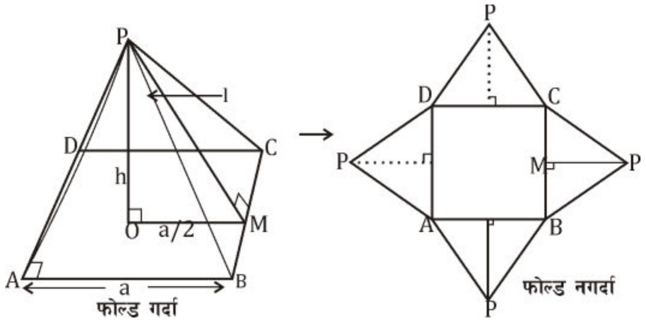


(ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल $= 2 \times$ आधारको क्षेत्रफल $+$ आयताकार सतहको क्षेत्रफल $= 2 \times \Delta ABC$ को क्षेत्रफल $+ (a + b + c) \times h$

(घ) त्रिभूजाकार प्रिज्मको आयतन $=$ आधारको क्षेत्रफल $\times$ उचाई

आधार वर्ग भएको पिरामिड (Square-based Pyramid)

वर्गाकार आधार पिरामिडका आधारको भूजाको लम्बाई (a), पिरामिडको उचाई (h) र छड्के उचाई (ℓ) दिइएको अवस्थामा



(क) त्रिजाकार सतहहरूको क्षेत्रफल $= 4 \times \Delta PBC$ को क्षेत्रफल (ΔPBC, ΔPAD, ΔPAB, र ΔPCD, का क्षेत्रफलहरूको अवस्था बराबर हुन्छ)

$$= 4 \times \frac{1}{2} a\ell$$

$$= 2a\ell$$

(ख) पूरा सतहको क्षेत्रफल $=$ आधारको क्षेत्रफल $+$ चारओटा त्रिभुजको क्षेत्रफल

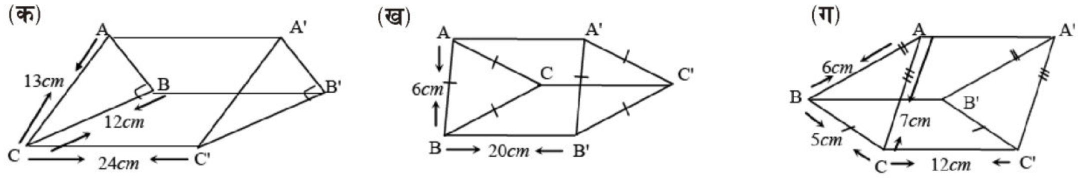
$$= a^2 + 2a\ell$$

(ग) आयतन $= \frac{1}{3} \times$ आधारको क्षेत्रफल $\times$ उचाई

$$= \frac{1}{2} a^2 h \quad [\text{यहाँ, } h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}} \text{ हुन्छ ।}]$$

उदाहरण : 1

1. दिइएका त्रिभुजाकार प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस् ।



समाधान :

(क) सुरुमा ΔABC को क्षेत्रफल निकाल्दा

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{(13)^2 - (12)^2}$$

$$= \sqrt{169 - 144}$$

$$= \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

ΔABC को क्षेत्रफल $(A) = \frac{1}{2}$ आधार $\times$ उचाइ

$\therefore \Delta ABC$ को क्षेत्रफल $(A) = \frac{1}{2} \times 12$ से.मि $\times 5$ से.मि. $= 30$ वर्ग से.मि.

अब, त्रिभुजाकार प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल

$$TSA = 2A + \ell(a + b + c)$$

$$= 2 \times 30 + 24(12 + 13 + 5)$$

$$= 60 + 24 \times 30$$

$= (60 + 720)$ वर्ग से.मि.

$= 780$ वर्ग से.मि.

आयतन $(V) = Ah$ (A: आधारको क्षेत्रफल)

$= (30 \times 24)$ घ.से.मि.

$= 720$ घ.से.मि.

(ख) ΔABC को क्षेत्रफल $(A) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2 [समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2]

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2$$

$$= 9\sqrt{3}\text{cm}^2$$

त्रिभुजाकार प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल $2A + 3a\ell$

[जहाँ $a =$ भुजाको लम्बाई र $h =$ प्रिज्मको उचाई]

$$= 2 \times 9\sqrt{3} + 3 \times 6 \times 20$$

$= [18\sqrt{3} + 360]$ वर्ग से.मि.

$= \left[2\frac{\sqrt{3}}{4}(6)^2 + 360\right]$ वर्ग से.मि.

$= [18\sqrt{3} + 360]$ वर्ग से.मि.

$= [31.176 + 360]$ वर्ग से.मि. $= 391.18$ वर्ग से.मि.

आयतन $(V) = Ah$ ($\because A =$ आधारको क्षेत्रफल)

$= [9\sqrt{3} \times 20]$ घ.से.मि.

$= [15.588 \times 20]$ घ.से.मि. $= 311.76$ घ.से.मि.

(ग) सुरुमा, ΔABC को क्षेत्रफल निकाल्दा,

आधारको अर्धमिति $s = \frac{a+b+c}{2}$

$s = \frac{5+7+6}{2}$

$s = 9$ से.मि.

ΔABC को क्षेत्रफल $(A) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{9(9-5)(9-7)(9-6)}$

$= \sqrt{9 \times 4 \times 2 \times 3}$

$= 6\sqrt{6}$

$= 14.69$ वर्ग से.मि.

त्रिभुजाकार प्रिज्मको पूरासतहको क्षेत्रफल

TSA $= 2A + h(a + b + c)$ [जहाँ, h= प्रिज्मको उचाइ]

$= 2 \times 14.69 + 12(5 + 7 + 6)$

$= (29.38 + 216)$ वर्ग से.मि.

$= 245.38$ वर्ग से.मि.

आयतन $(V) = Ah$ ($\because A =$ आधारको क्षेत्रफल)

$= 14.69 \times 12$

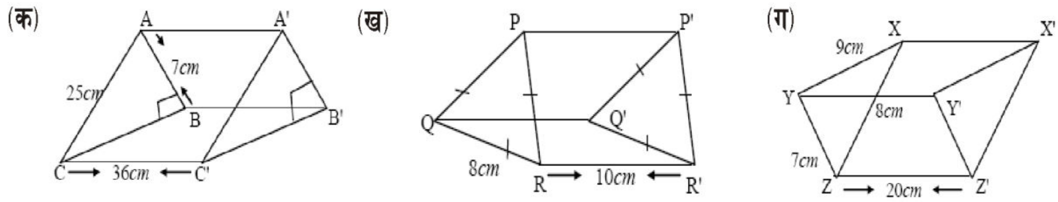
$= 176.28$ घ.से.मि.

अभ्यास : 1

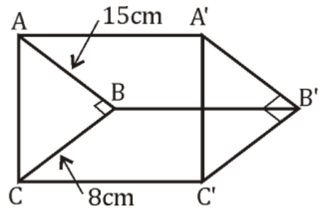
1. (क) आधारको परिमिति (b) र त्रिभूजाकार प्रिज्मको लम्बाई (ℓ) दिइएको अवस्थामा आयताकार सतहहरूको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

   (ख) त्रिभूजाकार प्रिज्ममा आधारको क्षेत्रफल, उचाई र आयतन बिचको सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।

2. दिइएका त्रिभुजाकार प्रिज्महरूको पूरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस् ।



उदाहरण : 2



दिइएको चित्र त्रिभुजाकार प्रिज्मको हो जसको आयतन 1800 घन से.मी. छ । यदि AB = 15 से.मी., BC = 8 से.मी. र $\angle ABC = 90^0$ भए प्रिज्मको लम्बाई पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ आधारको क्षेत्रफल

$= \Delta ABC$ को क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} AB \times BC \quad = \frac{1}{2} \times 15 \times 8 \text{ cm}^2 \quad = 60 \text{ cm}^2$

फेरि,

आयतन = आधारको क्षेत्रफल × लम्बाई

अथवा, $1800 = 60 \times$ लम्बाई

अथवा, $\frac{1800}{60} =$ लम्बाई

अथवा, $30 =$ लम्बाई

$\therefore$ प्रिज्मको लम्बाई 30 से.मि. रहेछ ।।

अभ्यास : 2

1. एउटा प्रिज्मको उचाई 25 से.मी. छ र यसको आयतन 400 घन से.मी. छ । प्रिज्मको आधारको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. एउटा त्रिभूजाकार प्रिज्मको उचाई $12\sqrt{3}$ से.मी. र आयतन 432 घन से.मी. भए आधारको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. एउटा त्रिभूजाकार प्रिज्मको आयताकार सतहहरूको क्षेत्रफल 432 वर्ग से.मी., प्रिज्मको उचाई 18 से.मी. र आधारका भूजाहरूको अनुपात 3:4:5 भए उक्त प्रिज्मको आधारको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण : 3

एउटा वर्गाकार आधार पिरामिडको ठाडो उचाई 24 से.मी. र आधारको भूजाको लम्बाई 14

से.मी. भए आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, आधारको भूजाको लम्बाई = 24 से.मी.

त्यसैले, आधारको क्षेत्रफल = 24^2 वर्ग से.मी.

= 576 वर्ग से.मी.

ठाडो उचाई (h) = 24 से.मी.

हामीलाई थाहा छ,

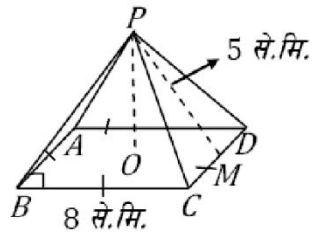
आयतन = आधारको क्षेत्रफल × ठाडो उचाई

$= 576cm^2 \times 24cm$

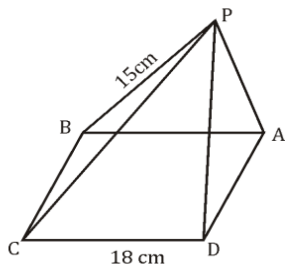
$= 13824cm^3$

अभ्यास : 3

1. आधारको क्षेत्रफल 'm' वर्ग एकाई र ठाडो उचाई 'n' एकाई भएको वर्गाकार पिरामिडको आयतन कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।
2. आधारमा 'a' एकाई भूजाको लम्बाई भएको वर्ग आधार पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।
3. वर्ग आधार भएको पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल 700 वर्ग से.मी. र छड्के उचाई 15 से.मी. भए उक्त पिरामिडको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।



4. दिइएको पिरामिडको पूरासतहको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्नुहोस् ।
5. चित्रमा दिइएको वर्ग आधार पिरामिडको आधारको भूजाको लम्बाई 18 से.मी. र किनारको लम्बाई (PB) = 15 से.मी. भए उक्त पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।



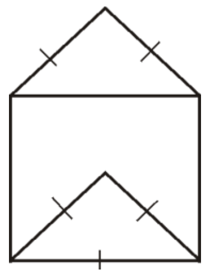
उदाहरण : 4

एउटा त्रिभुजाकार प्रिज्मको आयताकार सतहहरूको क्षेत्रफल र उचाई क्रमशः 432 वर्ग से.मी. र 24 से.मी. छ । उक्त त्रिभूजको आधारमा समवाहु त्रिभूज छ । प्रिज्मको पूरा सतहमा रु. 10 प्रति वर्ग से.मी. का दरले कागज लपेट्न जम्मा कति खर्च लाग्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् । 1 घन से.मी.को रु. 25 का दरले प्रिज्मको मूल्य राख्दा जम्मा प्रिज्मको मूल्य कति पर्छ ?

समाधान :

यहाँ, प्रिज्मको आयताकार सतहहरूको क्षेत्रफल = $432cm^2$, उचाई = 24cm

हामीलाई थाहा छ,



आयताकार सतहको क्षेत्रफल $=$ आधारको परिमिति $\times$ उचाई

अथवा, $432 =$ परिमिति $\times$ 24cm

अथवा, $\frac{432}{24} =$ परिमिति

अथवा, परिमिति $= 18$ से.मी. [परिमिति $=$ भूज $+$ भूजा $+$ भूजा]

$(a + a + a) = 18$ से.मि.

अथवा, $3 \times$ भूजाको लम्बाई $= 18$ से.मी.

अथवा, भूजाको लम्बाई $= 6$ से.मी.

फेरि, आधारको क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ (भूजा)^2 (भूजाको लम्बाई)^2

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (6)^2 \text{cm}^2$

$= 15.58 \text{cm}^2$

पूरा सतहको क्षेत्रफल $= 2 \times$ आधारको क्षेत्रफल $+$ आयताकार सतहहहरूको क्षेत्रफल

$= (2 \times 15.58 + 432) \text{cm}^2$

$= 463.16 \text{cm}^2$

कागज लपेट्न लाग्ने खर्च $=$ पूरा सतहको क्षेत्रफल $\times$ रू. 10

$= 463.16 \times$ रु. 10

$=$ रु. 4631.60

प्रिज्मको आयतन $=$ आधारको क्षेत्रफल $\times$ उचाई

$= 15.58 \times 24 \text{cm}^3$

$= 373.92 \text{cm}^3$

प्रिज्मको मूल्य $= 373.92 \times$ रु. 25 [$\because$ 1 cm^3 को मूल्य रु. 25 छ ।]

$=$ रु. 9348

अभ्यास : 4

1. यदि एउटा त्रिभूजाकार प्रिज्मको आयताकार सतहको क्षेत्रफल र उचाई क्रमशः 324 वर्ग से.मी. र 18 से.मी. भए यसको आधारको परिमिति कति हुन्छ ? आधारको प्रत्येक भूजाको किनाराका तिनओटा भूजाहरू प्रस्ट देखिने गरी रु. 20 प्रति से.मी. का दरले रङ लगाउँदा जम्मा

कति खर्च लाग्छ ?

2. एउटा चित्र वर्गाकार आधार भएको ठोस पिरामिड छ । उक्त पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल 675 वर्ग से.मी. छ । यदि वर्गाकार आधारको भूजा 15 से.मी. भए उक्त पिरामिडको त्रिभूजाकार सतहहरूमा रु. 25 प्रति वर्ग से.मी.का दरले रातो रङ लगाउन जम्मा कति खर्च लाग्छ ?

3. आफूले घरमा वा विद्यालयमा वा छिमेकमा देखेका त्रिभूजाकार प्रिज्म र वर्ग आधार पिरामिड कहाँ कहाँ छन् ? तिनीहरूको आयतन र पूरा सतहको क्षेत्रफल अनुमान गरी लेख्नुहोस् ।

5. पृष्ठपोषण

उदाहरण 1 सँग सम्बन्धित अभ्यास

1. (क) $p \times \ell$

   (ख) आयतन = आधारको क्षेत्रफल × उचाई

उदाहरण 2 सँग सम्बन्धित अभ्यास

उदाहरणमा दिइए जस्तै गरी समाधान गर्नुहोस् ।

उत्तर :	(i)	2184 वर्ग से.मी.	3024 घन से.मी.
	(ii)	295.42 वर्ग से.मी.	277.12 घ.से.मी.
	(iii)	533.67 वर्ग से.मी.	536.6 घन से.मी.

उदाहरण 3 सँग सम्बन्धित अभ्यास

1. $A = \frac{400}{25}\text{cm}^2 = 16\text{ cm}$ 2. $A = \frac{432}{12\sqrt{3}}\text{cm}^2 = 12\sqrt{3}\text{ cm}$

3. परिमिति $= 24$ cm. आधारको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 6 \times 8\text{ cm} = 24\text{cm}^2$

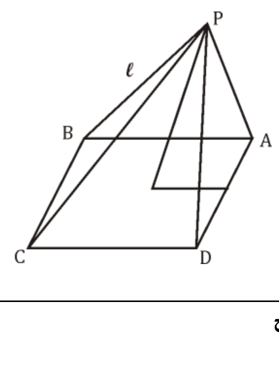
उदाहरण 3 सँग सम्बन्धित अभ्यास

1. $\frac{1}{3}$mn घ. एकाई 2. $a^2 + 2a\ell$ (जहाँ ℓ छड्के उचाई छ ।)

3. $2a = \frac{700}{25}b = 14\text{ cm}$

$n = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25\text{ cm}$

आयतन $= \frac{1}{3} \times 7^2 \times 24\text{ cm}^2 = 392\text{ cm}^3$



4. उदाहरणमा दिइए जस्तै गरी हल गर्नुहोस् ।

उत्तर : 144cm^2, 64cm^3

5. $15^2 = 2^2 + 9^2$ बाट $\ell^2 = 144$

$h^2 + 9^2 = \ell^2$ बाट $h = \sqrt{63}\text{cm}$

त्यसैले आयतन $= \frac{1}{2} \times (18)^2 \times \sqrt{63}\text{cm}^3 = 857.22\text{cm}^3$

पूरा सतहको क्षेत्रफल $= (18)^2 + 2 \times 18 \times 12 = 756\ \text{cm}^2$

उदाहरण 4 सँग सम्बन्धित अभ्यास

1. आधारको परिमिति $= (324 \div 18) = 18\text{cm}$, जम्मा खर्च $= 18 \times$ रु. $20 =$ रु. 360

2. $675 = (15)^2 +$ त्रिभूजाकार सतहको क्षेत्रफल

अथवा, $450\text{cm}^2 =$ त्रिभूजाकार सतहहरूको क्षेत्रफल

जम्मा खर्च $=$ रु. $25 \times 450 =$ रु. 11250

3. सम्बन्धित क्षेत्रमा गई सङ्कलन गर्नुहोस् ।

6. **सारांश** :

त्रिभुजाकार प्रिज्म :

- त्रिभूजाकार प्रिज्मको आयतन = आधारको क्षेत्रफल × लम्बाई
- पाठ्यपुस्तक तथा कक्षा १० को अन्तिम परिक्षामा सोधिएका प्रश्नहरू सबै हल गर्नुहोस् ।
- आधारमा समकोणी, समवाहु, समद्विवाहु र विषमवाहु त्रिभूज हुन्छ ।
- यस्तै गरी त्रिभूजाकार प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल र वर्ग आधार पिरामिडको आयतन र क्षेत्रफल सम्बन्धी सूत्रहरू सम्झिनुहोस् ।

वर्ग आधार पिरामिड [Right Pyramid मात्र]

- वर्गाकार आधार भएको पिरामिडको आयतन $= \frac{1}{3}$आधारको क्षेत्रफल × उचाइ
- चारओटै त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल बराबर र अनुरूप हुन्छन् ।
- चारओटै त्रिभुजहरू समाद्विवाहु त्रिभुज हुन्छन् ।
- पिरामिडको शीर्षविन्दु र आधारको वर्गका विकर्णहरू प्रतिच्छेदन भएको विन्दु जोड्ने रेखाखण्ड नै पिरामिडको उचाइ हुन्छ ।
- पिरामिडको शीर्षविन्दु र आधारको वर्गको भुजाको मध्यविन्दु जोड्ने रेखाखण्ड पिरामिडको छड्के उचाइ हुन्छ ।

एकाई : 8

महत्तम समापवर्त्यक र लघुत्तम समापवर्त्यक (HCF and LCM)

1. **परिचय :**

दुई वा दुई भन्दा बढी अभिव्यञ्जकहरूमा कुनै एउटा अभिव्यञ्जकलाई अर्को अभिव्यञ्जकले भाग गर्न सकिन्छ । यसरी सबै अभिव्यञ्जकहरूको सबै साझा गुणनखण्ड र उक्त गुणन खण्डलाई बाँकी गुणन खण्डहरूले गुणन गरी छुट्टै अभिव्यञ्जक पत्ता लगाउन सकिन्छ । जसलाई दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको ल.स. भनिन्छ भने सबै अभिव्यञ्जकहरूबाट लिइएको गुणन खण्डहरूको मात्र गुणनकलाई म.स. भनिन्छ ।

2. **सिकाई उपलब्धि :**

यस एकाईको अध्ययन गरिसकेपछि निम्नलिखित उपलब्धि हासिल हुनेछ ।

- बीज गणितीय अभिव्यञ्जकहरूको गुणनखण्ड विधिबाट म.स. र ल.स. निकाल्न (बढिमा तिन पदीय अभिव्यञ्जकसम्म)

3. **आधारभूत विषयवस्तु :**

बहुपदीयलाई दुई वा दुई भन्दा बढी बहुपदीय अथवा विजगणितीय अभिव्यञ्जकको गुणनखण्डका रूपमा व्यक्त गर्न सकिन्छ । यस प्रक्रियालाई खण्डिकरण भन्दछन् । गुणन खण्ड निकाल्दा निम्न सूत्र आवश्यक छन् ।

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a-b)^2+4ab = (a+b)(a+b)$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)(a-b)$
- $(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$
- $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2+2ab$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

4. **मुख्य विषय वस्तु :**

- ल.स. र म.स.को अवधारणा
- दिइएका दुई वा दुई भन्दा बढी परिमाणहरूलाई निःशेष भाग जाने सबैभन्दा ठूलो परिमाणलाई महत्तम समापवर्त्तक भनिन्छ । जस्तैः $(a-b)^2$ र $(a-b)$ को म.स. $(a-b)$ हुन्छ भने ल.स. $(a-b)^2$ हुन्छ ।
- ल.स. = म.स. × बाँकी गुणनखण्ड गुणनखण्डहरू हुन्छ ।

  जस्तैः $(x-2)(x-3)$ र $(x-2)(x-4)$ मा

  म.स. $= (x-2)$ र बाँकी गुणन खण्डहरू $(x-3)$ र $(x-4)$ छन् ।

त्यसैले, ल.स. = म.स. × बाँकी गुणन खण्डहरू

= (x -2) (x - 4) (x - 3)

- दुईओटा अभिव्यञ्जकको गुणनफल = ल.स. × म.स. हुन्छ ।

उदाहरण : 1

म.स. पत्ता लगाउनुहोस् ।

$(a^2 + 2a)$ र $(a + 2)$

समाधान :

पहिलो अभिव्यञ्जक = $a^2 + 2a = a(a + 2)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक = $(a + 2)$

∴ म.स. = $(a + 2)$ [दुवैमा साझा भएकोले]

अभ्यास : 1 (**म.स. पत्ता लगाउनुहोस् ।**

1. $(a + b)$ र $(a - b)$ 2. $(a^2 - b^2)$ र $(a + b)^2$ 3. $(a -b)^3$ र $(a -b)^2$

उदाहरण : 2

$x^2 - 49$ र $x^2 - 5x - 14$ को म.स. निकाल्नुहोस् ।

यहाँ, दिइएका दुबै अभिव्यञ्जकहरूको गुणनखण्डहरू निकाल्नुपर्ने हुन्छ ।

पहिलो अभिव्यञ्जक = $x^2 - 49$

$= x^2 - 7^2$ [शुत्रः $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$] को प्रयोग गरिएको छ ।

$= (x + 7)(x - 7)$

त्यस्तै, दोस्रो अभिव्यञ्जक = $x^2 - 5x - 14$ (यसको खण्डीकरण गर्नु पर्छ ।)

$= x^2 - (7 - 2)x - 14$ (गुणन गर्दा 14 र घटाउँदा 5 हुने दुई सङ्ख्याहरू 7 र 2 हुन् ।)

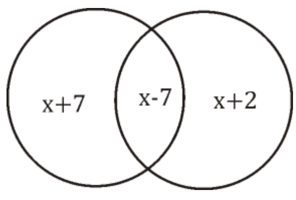
$= x^2 - 7x + 2x - 14$

$= x(x - 7) + 2(x - 7)$

$= (x - 7)(x + 2)$

अतः म.स. = $(x - 7)$ (दुबै अभिव्यञ्जकहरूको गुणनखण्डमा भएको साझा गुणनखण्ड)

यसलाई भेनचित्रद्वारा यसरी प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।



अभ्यास : 2

म.स. निकाल्नुहोस्

1. $x^2 - 2x,\ x^2 - 3x + 2$
2. $(a^2 - b^2), (a - b)^2$
3. $(a + b)^3, (a^3 + b^3)$
4. $3(a + 1),\ 6(a + 1)^2$
5. $x^2 - 5x + 6\ , x^3 + 3x^2 - 10x$
6. $12(x^2 - 9), 18(x^3 + 27)$
7. $x^5a^3 + 3a^5x^3 + 2a^7x\ ,\ x^6a^2 - x^2a^6$
8. $90(x^3 - 3x^2 - 10x)\ , 105(x^4 - 8x^3 + 15x^2)$

उदाहरण : 3

1. म.स. निकाल्नुहोस् ।

$x^3 + 6x^2 + 8x,\ \ x^2(2x^2 + 7x - 4)$ र $x(x^3 + 64)$

पहिलो अभिव्यञ्जक $= x^3 + 6x^2 + 8x$

$= x(x^2 + 6x + 8)$ (सबै पदमा रहेको साझा x लिइएको)

$= x(x^2 + 4x + 2x + 8)$ (खण्डीकरण गरेको)

$= x\{x(x + 4) + 2(x + 4)\}$

$= x(x + 4)\ (x + 2)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^2(2x^2 + 7x - 4)$

$= x^2(2x^2 + 8x - x - 4)$ (खण्डीकरण गरेको)

$= x^2\{2x(x + 4) - 1(x + 4)\}$ (अन्य साझा केही नहुँदा 1 साझा हुन्छ ।)

$= x^2(x + 4)\ (2x - 1)$

तेस्रो अभिव्यञ्जक $= x(x^3 + 64)$

$= x(x^3 + 4^3)$

$= x(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$ [$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ को सूत्र प्रयोग गरेको]

यहाँ, तीनओटै अभिव्यञ्जकहरूका साझा गुणनखण्डहरू x र (x+4) हुन् । दिइएका सबै अभिव्यञ्जकहरूलाई निःशेष भाग जाने सबैभन्दा ठूलो गुणनखण्ड भनेको साझा गुणनखण्डहरूको गुणनफल हो ।

$\therefore$ म.स. $= x(x + 4)$ हुन्छ ।

अभ्यास : 3

म.स. निकाल्नुहोस् ।

1. $90(x+3)(x+5),\ 15(x^2-25),\ 20(x^2+4x-5)$
2. $x^2+x-6,\ 6x^3+18x^2, 3x(x^2-2x-15)$
3. $a^2-ax-ab+bx,\ a^2-x^2,\ a^2-2ax+x^2$
4. $(a-b)^2(a-c),\ (a-c)^2(b-c)(a-b), (b-c)^2(a-b)\ (a-c)^2$

उदाहरण : 4

ल.स. पत्ता लगाउनुहोस् ।

$(a - b)^2, (a - b)^3$

समाधान :

पहिलो अभिव्यञ्जक : $(a - b)^2 = (a - b)\ (a - b)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक : $(a - b)^3 = (a - b)\ (a - b)\ (a - b)$

म.स. $= (a - b)\ (a - b) = (a - b)^2$

ल.स. = म.स. × बाँकी गुणन खण्डहरू

$= (a - b)^2 \times (a - b)$

$= (a - b)^3$

अभ्यास : 4

1. x र y को ल.स. कति हुन्छ ?
2. 2a र $2a^2$ को ल.स. कति हुन्छ ?
3. $a^2 - 2ab + b^2$ र $(a - b)$ को ल.स. कति हुन्छ ?

उदाहरण : 5

x^3-27 र x^2-6x+9 को ल.स. निकाल्नुहोस् ।

पहिलो अभिव्यञ्जक $= x^3-27$

$= x^3-3^3$

$= (x-3)(x^2+3x+9)$ [$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ को सूत्र प्रयोग गरेको]

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^2-6x+9$

$= (x-3)^2$ [खण्डीकरण वा सूत्र प्रयोग गरेको]

यी दुवै अभिव्यञ्जकहरूमा भएको साझा गुणनखण्ड म.स. $= (x - 3)$ हो ।

बाँकी गुणनखण्डहरू (x^2+3x+9) र $(x-3)$ हुन् ।

साझा गुणनखण्ड र बाँकी गुणनखण्डहरूको गुणनफल नै ल.स. हुन्छ ।

$\therefore$ ल.स. $=(x-3)\,(x^2+3x+9)(x-3)$ हुन्छ ।

अभ्यास : 5

ल.स. निकाल्नुहोस्

1. $a^2b+b\,,\,a^4b^2-b^2$
2. $(x-a)^2\,,\,(x^2-a^2)$
3. $3a+9\,,\,a^2-9$
4. $x^5y^2-x^2y^5,\,(x-y)^3$
5. a^2-1 र a^2-4a+3
6. x^2-5x-6 र $x^2-8x+12$
7. $-3y^2+2x^2-xy$ र $12x^4-27x^2y^2$

उदाहरण : 6

ल.स. निकाल्नुहोस् ।

$a(a-b)(b-c),\ b(b-c)(c-a)$ र $(a-b)(c-a)$

पहिलो अभिव्यञ्जक $=a(a-b)(b-c)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $=b(b-c)(c-a)$

तेस्रो अभिव्यञ्जक $=(a-b)(c-a)$

साझा गुणनखण्ड $=1$ (किनकी तिनवटा अभिव्यञ्जकहरूमध्ये गुणनखण्डहरूमध्ये कुनै पनि गुणनखण्ड साझा छैन ।)

यहाँ, गुणनखण्डहरूमध्ये कुनै दुई अभिव्यञ्जकहरूमा साझा भएका $(a-b)$, $(b-c)$ र $(c-a)$ तर साझा नभएका गुणनखण्डहरू a र b हुन् ।

$\therefore$ ल.स. $=ab(a-b)(b-c)(c-a)$ हुन्छ ।

अभ्यास : 6

ल.स. पत्ता लगाउनुहोस् ।

1. x^2-$8x$, x^2-$16x+64$ र x^2-64
2. $12x^4$-$27x^2y^2$, $2x^2+xy$-$3y^2$ र $2x^2$-xy-$3y^2$
3. y^2+y-20, $y^2+9y+20$ र y^2+2y-15
4. z^2-z, z^2+z र z^2-1
5. $6a^2$-$7ab$-$3b^2$, $4a^2$-$12ab+9b^2$ र $6a^2$-$11ab+3b^2$

उदाहरण : 7

म.स. र ल.स. दुबै निकाल्नुहोस् ।

x^2-y^2, $(x+y)^2$ र $(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

पहिलो अभिव्यञ्जक $= x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= (x+y)^2 = (x+y)(x+y)$

तेस्रो अभिव्यञ्जक $(x^3+y^3)(x^3-y^3) = (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

म.स. $= (x+y)$

ल.स. $= (x+y)(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

अभ्यास : 7

म.स. र ल.स. निकाल्नुहोस्

1. $x^2 - x$ र $x^2 - 1$
2. $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$ र $(a - b)^2$
3. $x^2 - 1$, $(x + 1)^2$ र $(x + 1)$
4. $x^2 - 4$, $x^2 + 5x + 6$ र $x^2 + 7x + 10$
5. $a^3 + b^3$ र $a^4 + a^2b^2 + b^4$
6. $x^3 + y^3$, $x^3 - x^2y + xy^2$ र $x^4 + x^2y^2 + y^4$
7. $(a - b)^3$ र $a^2 - b^2$ सँग सम्बन्धित कुनै 4 ओटा प्रश्नहरू निर्माण गर्नुहोस् । तिनीहरूको म.स. र ल.स. पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. **पृष्ठपोषण** :

यस एकाईमा भएका प्रत्येक प्रश्नलाई हल गर्दा खण्डीकरणका नियमहरू र सूत्रहरूको आधारमा रहि गर्नुहोस् । अभ्यासमा भएका प्रश्नहरू उदाहरण अनुसार भएकाले उदाहरणहरूको अध्ययन गरी त्यसै अनुसार अभ्यासमा भएका समस्याहरू समाधान गर्ने प्रयास गर्नुहोस् ।

उदाहरण : 1 सँग सम्बन्धित अभ्यास

1. उत्तर : 1 2. उत्तर : $(a + b)$ 3. उत्तर : $(a - b)^3$

उदाहरण : 2 सँग सम्बन्धित अभ्यास

उत्तर :

1. $(x - 2)$ 2. $(a - b)$ 3. $(a + b)$
4. $3(a + 1)$ 5. $(x - 2)$ 6. $6(x + 3)$
7. $a^2x(x^2 + a^2)$ 8. $15x(x - 5)$

उदाहरण : 3 सँग सम्बन्धित अभ्यास

उत्तर :

1. $(x - 5)$ 2. $(x - 3)$ 3. $(a - x)$ 4. $(a - b)(a - c)$

उदाहरण : 4 सँग सम्बन्धित अभ्यास

उत्तर :

(i) उत्तर : xy (ii) उत्तर : $2a^2$ (iii) उत्तर : $(a - b)^2$

उदाहरण : 5 सँग सम्बन्धित अभ्यास

उत्तर :

1. $b^2(a^2 + 1)(a^2 - 1)$
2. $(x - a)^2(x + a)$
3. $3(a + 3)(a - 3)$
4. $x^2y^2(x - y)^3(x^2 + xy + y^2)$
5. $(a^2 - 1)(a - 3)$
6. $(x - 6)(x + 1)(x + 2)$
7. $3x^2(2x - 3y)(x + y)(2x + 3y)$

उदाहरण : 6 सँग सम्बन्धित अभ्यास

उत्तर :

1. $x(x - 8)^2(x + 8)$
2. $3x^2(2x + 3y)(2x + 3y)(x + y)(x - y)$
3. $(y + 5)(y - 4)(y + 4)(y - 3)$
4. $z(z + 1)(z + 1)$
5. $(2a + 3b)^2(3a + b)(3a - b)$

उदाहरण : 7 सँग सम्बन्धित अभ्यास

उत्तर :

1. $(x - 1)$, $(x + 1)(x - 1)$
2. $(a - b)$, $(a - b)^2(a + b)(a^2 + b^2)(a^2+ab+b^2)$
3. $(x - 1)$, $(x + 1)^2(x - 1)$
4. $(x - 2)$, $(x + 2)(x - 2)(x + 3)(x + 5)$
5. $(a^2 - ab + b^2)$, $(a^2 - ab + b^2)(a + b)(a^2 + ab + b^2)$
6. $(x^2 - xy + y^2)$, $x(x^2 - xy + y^2)(x + y)(x^2 + xy + y^2)$

6. **सारांश :**

म.स. र ल.स. निकाल्दा निम्न लिखित बुँदाहरू ध्यान दिनुपर्छ ।

- सबै अभिव्यञ्जकहरू खण्डीकरण गर्ने ।
- ती अभिव्यञ्जकहरूको साझा गुणन खण्डहरू लिने ।
- साझा गुणन खण्डहरूलाई गुणनफलको रूपमा लेख्ने र त्यसलाई नै म.स. भन्दछन् ।
- दुई वा दुई भन्दा बढी बीजगणितीय अभिव्यञ्जकहरूको साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणन खण्डहरूलाई ल.स. भन्दछन् ।
- पाठ्यपुस्तकमा भएका ल.स. र म.स. का समस्या समाधान गर्नुहोस् ।

एकाइ : 9

सर्डहरू (Surds)

1. **परिचय** :

यस एकाइमा सर्डका साधारण क्रियाहरू, आनुपातीकरण र साधारणमूलक समीकरण सम्बन्धी विषयवस्तुहरू छलफल गरिने छ । यसका साथै सर्डहरूको सरलीकरणका समस्या समेत समाधान गरिने छ ।

2. **सिकाई उपलब्धि** :

यस एकाइको अध्ययनपछि निम्नलिखित सिकाई उपलब्धि हासिल हुनेछ । साधारण मूलक सर्डका (Radical Surds) गणितीय चार साधारण नियम समावेश भएका सरलीकरणका समस्याहरू हल गर्न ।

3. **आधारभूत विषयवस्तु** : साधारणमूलक समीकरणको हल ।

(क) $\sqrt{16}$, $\sqrt{x^4}$, $\sqrt{\frac{144}{169}}$ अनुपातिक (Rational) हुन् । किनभने $\sqrt{16} = \pm 4$

$\sqrt{x^4} = \pm x^2$, $\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm \frac{12}{13}$ हुन्छन् । तर $\sqrt{3}$, $\sqrt{x^3}$ जसको वर्गमूल पूर्ण संख्यामा हुन्छ त्यसलाई अनुपातिक संख्या भनिन्छ ।

(ख) कुनै सङ्ख्या जसलाई $\frac{p}{q}$ को रूपमा व्यक्त गरिन्छ, त्यसमा p र q पूर्णाङ्कहरू हुन्छन् भने $q \neq o$ हुन्छ । यस किसिमको सङ्ख्यालाई अनुपातिक सङ्ख्या (Rational Number) भनिन्छ ।

जस्तो 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, ... साथै 1, $\frac{-1}{2}$, $\frac{-1}{3}$, $\frac{-2}{3}$, ... आदि अनुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् ।

4. **मुख्य विषयवस्तु** :

(क) जस्तो $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ जस्तालाई अनानुपातिक सङ्ख्याको उदाहरणहरूको रूपमा लिन सकिन्छ । सर्डलाई अनुपातिक सङ्ख्याको वर्गमूल, घनमूलका रूपमा समेत लिइन्छ ।

(ख) अनानुपातिक संख्या वा सर्ड संख्या जुन संख्याको सिधै वर्गमूल निकाल्न सकिन्छ, त्यस्ता संख्यालाई अनानुपातिक संख्या वा सर्ड संख्या भनिन्छ जस्तैः $\sqrt{3}$, $\sqrt{x^3}$, $3\sqrt{x}$, $4\sqrt{54}$

(ग) कुनै सङ्ख्या जसलाई $\frac{p}{q}$ को रूपमा लेख्न सकिँदैन भने त्यस किसिमका संख्याहरूलाई अनानुपातिक सङ्ख्या (Irrational Number) वा सर्ड्स (Surds) भनिन्छ ।

अनानुपातिक संख्याको निश्चित मान निकाल्न सकिँदैन ।

(ङ) $\sqrt{5}$ सर्डको क्रम **2** हो भने यसलाई $5^{\frac{1}{2}}$ लेखिन्छ । $\sqrt[3]{5}$ सर्डको क्रम **3** हो । यसलाई $5^{\frac{1}{3}}$ लेखिन्छ त्यस्तै $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[5]{11}$ आदिमा क्रमशः ध्यान दिनुपर्ने कुराहरू 4 र 5 तिनीहरूका क्रम हुन् ।

(च) अनुपातिक सङ्ख्या र सर्डको गुणनफल लाई मिश्रित सर्ड भनिन्छ । जस्तो $2\sqrt{3}$, $3\sqrt[3]{5}$ ……… आदि मिश्रित सर्डका उदाहरणहरू हुन ।

(छ) सर्डको रूपान्तर : मिश्रित सर्डलाई पूर्ण सर्डमा रूपान्तर गर्न सकिन्छ ।

जस्तो $2\sqrt{5}=\sqrt{20}$

$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$

(ज) त्यसरी नै पूर्णसर्डलाई पनि मिश्रित सर्डमा रूपान्तर गर्न सकिन्छ ।

जस्तैः $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$

$\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8 \times 5} = 2\sqrt[3]{5}$

(झ) समान र असमान सर्डस : मूलचिह्न भित्र रहेका सङ्ख्याहरू एउटै भएका सर्डसलाई समान र फरक रहेकालाई असमान सर्ड भनिन्छ ।

जस्तैः $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$, $7\sqrt{3}$, समान सर्डसका उदाहरण हुन भने, $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{7}$ आदि असमान सर्डसका उदाहरणहरू हुन् ।

(ञ) सर्डसहरूको क्रम (Order of surds) :

सर्डसहरूको क्रम मूल चिह्नमा रहेको अङ्कले जनाउँछ । उदाहरणको लागि $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$ र क्रमका हुन् भने $\sqrt[3]{3}$ र $\sqrt[4]{5}$ क्रमशः तीन र चार क्रमका हुन् । त्यस्तै $\sqrt[n]{x}$, n क्रमको सर्डस हो ।

तल दिइएका सर्डसहरूलाई सरल रूपमा व्यक्त गर्ने तरिका हेरौं ।

(अ) $\sqrt{27}=\sqrt{3\times3\times3}=3\sqrt{3}$ हुन्छ ।

$$\begin{array}{r|l} 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 16 \\ \hline 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline & 2 \end{array}$$

(आ) $\sqrt[3]{16x} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 2x} = 2\sqrt[3]{2x}$ हुन्छ ।

(ट) सर्डसहरूको जोड र घटाऊमा सर्डसको क्रम तथा मूल चिन्ह भित्रको परिमाणहरू उही भएमा मात्र सरल गर्न सकिन्छ ।

उदाहरण : 1

(क) सरल गर्नुहोस् : $\sqrt{3}+\sqrt{75}$

यहाँ, दुवै पदको क्रम एउटै अर्थात 2 छ । तर मूल चिह्न भित्रका परिमाणहरू पनि उही भएमा मात्र ती पदहरू जोड्न सकिन्छ । $\sqrt{75}$ को परिमाण पनि समान बनाउन सकिन्छ जस्तै :

अब, $\sqrt{75}$ लाई सरलरूपमा व्यक्त गर्दा,

$\sqrt{75} = \sqrt{5 \times 5 \times 3} = 5\sqrt{3}$ हुन्छ ।

त्यसैले, $\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = \sqrt{3}(1 + 5) = 6\sqrt{3}$ हुन्छ । समान $\sqrt{3}$ भएकाले

(ख) सरल गर्नुहोस् : $\sqrt{20x^3} + \sqrt{80x^3}$

समाधान : $\sqrt{20x^3} + \sqrt{80x^3} = \sqrt{2 \times 2 \times 5 \times x^3} + \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times x^3}$

$= 2x\sqrt{5x} + 4x\sqrt{5x}$ or

$= 6x\sqrt{5x}$

(ग) सरल गर्नुहोस् : $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{192}$

समाधान : $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{3^3 \times 3} + \sqrt[3]{2^3 \times 3} + \sqrt[3]{4^3 \times 3}$

$= 3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3} + 4\sqrt[3]{3}$ or $\sqrt[3]{3}(3 + 2 + 4)$

$= 9\sqrt[3]{3}$

(घ) सरल गर्नुहोस् : $\sqrt{3} + \sqrt{5} + 3\sqrt{3} + 5\sqrt{5}$

समाधान : $\sqrt{3} + \sqrt{5} + 3\sqrt{3} + 5\sqrt{5} = \left(\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{5} + 5\sqrt{5}\right)$

$= 4\sqrt{3} + 6\sqrt{5}$

नोटः $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ **र** $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$ प्रकारका हिसाबहरू सरल गर्न वा जोड्न सकिँदैन ।

अभ्यास : 1

1. सर्डको परिभाषा दिनुहोस् ।

   (क) $\sqrt[3]{40}$ को सर्डको क्रम कति हुन्छ ?

   (ख) पूर्णसर्ड र मिश्रित सर्डबिच भिन्नता पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ग) समान र असमान सर्डको एक-एक उदाहरण लेख्नुहोस् ।

2. सरल रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् :

   (1) $\sqrt{80}$ (2) $\sqrt{96a^5}$

(3) $\sqrt[3]{81x^5y^6}$ (4) $\sqrt[4]{48a^6b^5}$

3. **सरल गर्नुहोस् :**

(1) $\mathbf{6\sqrt{5} + 3\sqrt{5}}$ (2) $\mathbf{\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{54}}$

(3) $\mathbf{\sqrt[4]{80b^5} + \sqrt[4]{408b^5}}$

उदाहरण : 2

(क) सरल गर्नुहोस् : $\sqrt{18y^3}$-$\sqrt{8y^3}$

समाधान : $\sqrt{18y^3}$-$\sqrt{8y^3}$ $= \sqrt{3^2\times2y^3}$-$\sqrt{2^2\times2y^3}$

$= 3y\sqrt{2y} - 2y\sqrt{2y} = y\sqrt{2y}$

(ख) सरल गर्नुहोस् : $2\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{375}$

समाधान : $2\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{375} = 2\sqrt[3]{3^3 \times 3} - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{5^3 \times 3}$

$= 3 \times 2\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} - 5\sqrt[3]{3}$

$= 6\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} - 5\sqrt[3]{3} = 0$

(ग) सरल गर्नुहोस् : $5\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - 4\sqrt{3}$

समाधान : $5\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - 4\sqrt{3} = (5\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) - (2\sqrt{5} + 3\sqrt{5})$

$= \sqrt{3} - 5\sqrt{5}$

नोट : $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ र $\sqrt[3]{3} - \sqrt{3}$ प्रकारका हिसाबहरू सरल गर्न वा घटाउन सकिँदैन ।

अभ्यास : 2

1. (क) $9\sqrt{3}$-$5\sqrt{3}$ (ख) $3\sqrt{8} - \sqrt{50}$ (ग) $\mathbf{\sqrt{32} - \sqrt{18}}$

(घ) $\mathbf{4\sqrt{12} - 7\sqrt{48} - \sqrt{50}}$ (ङ) $\mathbf{\sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{98}}$

(च) $\mathbf{2\sqrt[3]{40} + 3\sqrt[3]{625} - 4\sqrt[3]{320}}$ (छ) $2\sqrt{\boldsymbol{x}} - \mathbf{6}\sqrt{\boldsymbol{x}} + \mathbf{15}\sqrt{\boldsymbol{x}}$

2. सरल गर्नुहोस् ।

(क) $2\sqrt[2]{18} + \mathbf{\sqrt[5]{50}}$ **-** $\mathbf{7\sqrt{72}}$ (ख) $\mathbf{2\sqrt[3]{16}}$ **-** $\mathbf{3\sqrt[3]{54} + 4\sqrt[3]{250}}$

उदाहरण : 3

(क) सरल गर्नुहोस् : $\mathbf{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$

समाधान : $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{5\times5} = \sqrt{5^2} = 5$

(ख) सरल गर्नुहोस् : $\mathbf{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{8}}$

समाधान : $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{5 \times 8} = \sqrt[3]{5 \times 2^3} = 2\sqrt[3]{5}$

(ग) सरल गर्नुहोस् : $\sqrt{\mathbf{27x}} \times \sqrt{\mathbf{32x^2}}$

समाधान : $\sqrt{27x} \times \sqrt{32x^2} = \sqrt{27 \times x \times 32 \times x^2}$

$= \sqrt{\mathbf{3 \times 3 \times 3 \times \boldsymbol{x} \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x}}}$

$= \sqrt{\mathbf{3^2 \times 3 \times \boldsymbol{x} \times 2^2 \times 2^2 \times 2 \times \boldsymbol{x}^2}}$

$= \mathbf{3 \times 2 \times 2 \times \boldsymbol{x}\sqrt{3 \times 2 \times \boldsymbol{x}}}$

$= \mathbf{12\boldsymbol{x}\sqrt{6\boldsymbol{x}}}$

(घ) सरल गर्नुहोस् : $\sqrt{\mathbf{3b}} \times \sqrt[3]{\mathbf{5a^2}} \times \sqrt{\mathbf{3b}} \times \sqrt[3]{\mathbf{125 \times 4a^2}}$

समाधान : $\sqrt{3b} \times \sqrt[3]{5a^2} \times \sqrt{3b} \times \sqrt[3]{125 \times 4a^2}$

$= \left(\sqrt{3b} \times \sqrt{3b}\right)\left(\sqrt[3]{5a^2} \times \sqrt[3]{125 \times 4a^2}\right)$

$= \sqrt{9b^2} \times \sqrt[3]{125 \times 5 \times 4a^4}$

$= 3b \times 5a\sqrt[3]{20a}$

$= 15ab\sqrt[3]{20a}$

(ङ) सरल गर्नुहोस् : $\mathbf{(4\sqrt{3} - \sqrt{2})(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3})}$

समाधान : $\mathbf{(4\sqrt{3} - \sqrt{2})(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) - \sqrt{2}(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3})}$

$= 12\sqrt{6} + 20 \times 3 - 3 \times 2 - 5\sqrt{6} = 7\sqrt{6} + 54$

(च) सरल गर्नुहोस् : $\left(2\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)$

समाधान : $\left(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}\right) = \left(2\sqrt{x}\right)^2 - \left(3\sqrt{y}\right)^2$

$= 4x - 9y$

अभ्यास : 3

1. सरल गर्नुहोस् ।

(क) $\sqrt{\mathbf{104}} \times \sqrt{\mathbf{26}}$ (ख) $\sqrt[3]{\mathbf{5}} \times \sqrt[3]{\mathbf{6}}$

(ग) $\sqrt[3]{\mathbf{16}} \times \sqrt[3]{\mathbf{81}} \times \sqrt[3]{\mathbf{625}}$

2. सरल गर्नुहोस् ।

(क) $\mathbf{(3\sqrt{2} - 7)\,(2\sqrt{3} - 2)}$ (ख) $\left(\mathbf{4\sqrt{\boldsymbol{x}} + 3\sqrt{\boldsymbol{y}}}\right)\left(\mathbf{4\sqrt{\boldsymbol{x}} - 3\sqrt{\boldsymbol{y}}}\right)$

(ग) $\sqrt{\boldsymbol{xy}}\left(\sqrt{\boldsymbol{x}} + \sqrt{\boldsymbol{y}}\right)$ (घ) $\left(\boldsymbol{a} + \sqrt{\boldsymbol{a}^2 - \mathbf{1}}\right)\left(\boldsymbol{a} - \sqrt{\boldsymbol{a}^2 - \mathbf{1}}\right)$

(ङ) $\left(x^2-\sqrt{x^4-1}\right)\left(x^2+\sqrt{x^4-1}\right)$ (च) $\left(3\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$

(छ) $\left(\sqrt{x}+a\sqrt{y}\right)^2$

उदाहरण : 4

(क) सरल गर्नुहोस : $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{27}}$

समाधान : $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{27}}=\frac{\sqrt{4^2\times3}}{\sqrt{3^2\times3}}=\sqrt{\frac{4^2\times3}{3^2\times3}}=\sqrt{\frac{4^2}{3^2}}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$

(ख) सरल गर्नुहोस् : $9\sqrt[3]{4}\div3\sqrt[3]{2}$

समाधान : $9\sqrt[3]{4}\div3\sqrt[3]{2}=\frac{9}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{2}}=3\sqrt[3]{2}$

(ग) सरल गर्नुहोस् : $\sqrt{128ab^3}\div\sqrt{56a^2b}$

समाधान : $\frac{\sqrt{128ab^3}}{\sqrt{56a^2b}}=\sqrt{\frac{128ab^3}{56a^2b}}=\sqrt{\frac{4\times2\times16\times a\times b^3}{4\times2\times7\times a^2\times b}}=4b\sqrt{\frac{1}{7a}}$

अभ्यास : 4

1. हल गर्नुहोस् ।

(क) $10\sqrt{18}\div2\sqrt{12}$ (ख) $\sqrt[3]{x^7y^8z^9}\div\sqrt[3]{81x^5y^6z^5}$

2. सरल गर्नुहोस् ।

(क) $\sqrt{125}\div\sqrt{5}$ (ख) $\sqrt[3]{81}\div\sqrt[3]{24}$

उदाहरण : 5

अनुपातिकरण : सर्डनिहित भिन्नको हरलाई सर्डरहित बनाउने क्रियालाई अनुपातीकरण भनिन्छ ।

(क) $\frac{2}{3\sqrt{5}}$ लाई अनुपातीकरण गर्नुहोस् ।

$\frac{2}{3\sqrt{5}}=\frac{2}{3\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ [अंश र हरमा, हरको समान सर्डले गुणा गर्नुपर्छ ।]

$=\frac{2\sqrt{5}}{3\times5}=\frac{2\sqrt{5}}{15}$

(ख) अनुपातीकरण गर्नुहोस् : $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

समाधान : $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

[हरको परिमाणको अनुबद्ध (conjugate) ले अंश र हरमा गुणा गर्नुपर्दछ ।]

$$= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} = \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{(a-b)\ (a+b)}$$

अभ्यास : 5

1. आनुपातीकरण गर्नुहोस् :

(क) $\frac{9}{2\sqrt{3}}$ (ख) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ (ग) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

(घ) $\frac{3}{2\sqrt{5}-1}$ (ङ) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ (च) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

(छ) $\frac{1}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$ (ज) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$ (झ) $\frac{6-4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}$

उदाहरण : 6

भिन्नात्मक सर्डहरूको सरलीकरण

(क) सरल गर्नुहोस् : $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

समाधान : $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$$= \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}-\frac{4\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}+\frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$ (अनुपातिकरण गर्दा)

$$=\frac{3\sqrt{12}-3\sqrt{6}}{6-3}-\frac{4\sqrt{18}-4\sqrt{6}}{6-2}+\frac{\sqrt{12}-\sqrt{18}}{2-3}$$

$$= \frac{3\sqrt{12}-3\sqrt{6}}{3}-\frac{4\sqrt{18}-4\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{12}-\sqrt{18}}{1}$$

$$= \frac{12\sqrt{12}-12\sqrt{6}-12\sqrt{18}+12\sqrt{6}-12\sqrt{12}+12\sqrt{18}}{12}$$

$$= \frac{0}{12} = 0$$

(ख) सरल गर्नुहोस् : $\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}+\frac{1}{a-\sqrt{a^2-1}}$

समाधान : $\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}+\frac{1}{a-\sqrt{a^2-1}} = \frac{a-\sqrt{a^2-1}+a+\sqrt{a^2-1}}{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)}$

$$= \frac{2a}{a^2-\left(\sqrt{a^2-1}\right)^2} = \frac{2a}{a^2-a^2+1} = 2a$$

अभ्यास : 6

1. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1}{2+\sqrt{5}} - \frac{1}{2-\sqrt{5}}$

(ख) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

(ग) $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

(घ) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$

(ङ) $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} - \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

उदाहरण : 7

1. साधारणमूलक समीकरणहरूको हल ।

(क) $\sqrt{x+21}-\sqrt{x}=3$ (ख) $\frac{2x-3}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x}-2\right)$ (ग) $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=3-\frac{\sqrt{x}+1}{2}$

2. हल गर्नुहोस् : $\sqrt{x+7}-\sqrt{x}=1$

बराबर चिह्नको दुवैतर्फ मूलचिह्नका पदहरू राख्नुपर्छ ।

$\sqrt{x+7}=1+\sqrt{x}$

वा, $\left(\sqrt{x+7}\right)^2=\left(1+\sqrt{x}\right)^2$ [दुवैतर्फ वर्ग गर्दा]

वा, $x+7=1+2.\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)^2$ [मूलचिह्नलाई वर्ग गर्दा मूलचिह्न हट्छ]

वा, $x+7=1+2\sqrt{x}+x$

वा, $x-x+7-1=2\sqrt{x}$ [मूलचिह्न भएको पदलाई छुट्याएको]

वा, $6=2\sqrt{x}$

वा, $3=\sqrt{x}$ [दुवैतिर वर्ग गर्दा]

वा $9 = x$ $\therefore x = 9$

नोट : उत्तर मिलेको छ, छैन थाहा पाउन दिइएको प्रश्नमा आएको चलको मानले प्रतिस्थापना गरी हेर्नुपर्छ । यदि दुवैतर्फ बराबर परिमाण आएमा उत्तर मिलेको ठहर्छ ।

जस्तैः $\sqrt{x+7}-\sqrt{x} = 1$ मा $x = 9$ राख्दा,

$\mathbf{\sqrt{9+7}-\sqrt{9}=1}$

वा, $\sqrt{16} - \sqrt{9} = 1$

वा, $4 - 3 = 1$

वा, $1 = 1$ मिलेको छ ।

- सर्डलाई अनुपातिकमा रुपान्तरण

i, कुनै एक पदीय सर्डलाई सोही सर्डले गुणन गर्दा आउने गुणनफल अनुपातिक संख्या हुन्छ । जस्तो : $\sqrt{a}$ लाई $\sqrt{a}$ ले गुणन गर्दा a हुन्छ ।

ii. कुनै दुई पदीय सर्डलाई सोही सर्डको अनुबद्धले गुणन गर्दा आउने गुणनफल अनुपातिक संख्या हुन्छ ।

जस्तै : $(2\sqrt{5} + 3\sqrt{3})$ र $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})$ एक अर्काका अनुवद्ध हुन् ।

3. हल गर्नुहोस् : $\frac{2y-7}{\sqrt{y}-1} = \frac{1}{3}(\sqrt{y} + 1)$

वा, $3(2y - 7) = (\sqrt{y} - 1)(\sqrt{y} + 1)$ [क्रसगुणा गरेको]

वा, $6y - 21 = (\sqrt{y})^2 - (1)^2$ [$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ प्रयोग गरेको]

वा, $6y - 21 = y - 1$

वा, $6y - y = -1 + 21$ [पदहरू मिलाएको]

वा, $5y = 20$

$\therefore y = \frac{20}{5} = 4$ उत्तर

4. हल गर्नुहोस् : $\frac{2x-1}{\sqrt{2x}+1} = 1 + \frac{\sqrt{2x}-1}{3}$

वा, $\frac{(\sqrt{2x})^2-(1)^2}{\sqrt{2x}+1} = \frac{3+\sqrt{2x}-1}{3}$ [$a - 1 = (\sqrt{a})^2 - (1)^2$ गरेको]

वा, $\frac{(\sqrt{2x}+1)(\sqrt{2x}-1)}{(\sqrt{2x}+1)} = \frac{2+\sqrt{2x}}{3}$

वा, $3(\sqrt{2x}-1) = 2+\sqrt{2x}$ [क्रसगुणा गरेको]

वा, $3\sqrt{2x}-3 = 2+\sqrt{2x}$

वा, $3\sqrt{2x}-\sqrt{2x} = 2+3$ [सजातीय पदहरू मिलाएको]

वा, $2\sqrt{2x} = 5$

वा, $\sqrt{2x} = \frac{5}{2}$

दुवैतर्फ वर्ग गर्दा, $2x = \frac{25}{4}$

$\therefore x = \frac{25}{8}$ उत्तर

5. हल गर्नुहोस् : $\sqrt{x^2+11x+20} - \sqrt{x^2+5x-1} = 3$

or, $\sqrt{x^2+11x+20}=\sqrt{x^2+5x-1}+3$ [दुवैतर्फ वर्ग गर्दा]

or, $\left(\sqrt{x^2+11x+20}\right)^2=\left(\sqrt{x^2+5x-1}+3\right)^2$

or, $x^2+11x+20=\left(\sqrt{x^2+5x-1}\right)^2+2.3\sqrt{x^2+5x-1}+(3)^2$

$\because (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

or, $x^2+11x+20-x^2-5x+1-9=6\sqrt{x^2+5x-1}$

or, $6x+12=6\sqrt{x^2+5x-1}$

or, $6(x+2)=6\sqrt{x^2+5x-1}$

or, $x+2=\sqrt{x^2+5x-1}$

फेरि दुवैतर्फ वर्ग गर्दा,

$(x+2)^2=\left(\sqrt{x^2+5x-1}\right)^2$

or, $x^2+4x+4=x^2+5x-1$

or, $x^2+4x+4-x^2-5x+1=0$

or, $-x+5=0$

$\therefore x=5$ उत्तर

6. हल गर्नुहोस् : $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=4$

or, $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{a}).(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=4$

or, $\frac{x+2\sqrt{ax}+a+x-2\sqrt{ax}+a}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{a})^2}=4$

or, $\frac{2x+2a}{x-a}=4$

or, $4x-4a=2x+2a$

or, $4x-2x=4a+2a$

or, $2x=6a$

or, $x=\frac{6a}{2}$

$\therefore x=3a$ उत्तर

अभ्यास : 7

हल गर्नुहोस् :

1. (क) $x\sqrt{x-7}=7-\sqrt{x}$ (ख) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$

2. (क) $\frac{2(x+3)}{\sqrt{x}+1}=\frac{2}{3}(\sqrt{x}-1)$ (ख) $\frac{\sqrt{y}+\sqrt{5}}{\sqrt{y}-\sqrt{5}}=3$ (ग) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{7}}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}=3$

3. (क) $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=4+\frac{\sqrt{x}-1}{2}+1$ (ख) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}=\frac{1}{2}$

4. (क) $\sqrt{x^2-3x+5}-\sqrt{x^2-4x+4}= 1$

   (ख) $\sqrt{x^2-5x+7}+\sqrt{x^2-3x+3} = 2$

5. (क) $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}$ (ख) $\frac{2+\sqrt{4x-1}}{2-\sqrt{4x-1}}+\frac{5}{3} = 2$

6. **पृष्ठपोषण** :

   सबै अभ्यासका प्रश्नहरू उदाहरण अनुसार हल गर्नुहोस् ।

उत्तरहरू:

अभ्यास : 1

1. (क) 3.

2. (क) $4\sqrt{5}$ (ख) $4a^2\sqrt{6a}$ (ग) $3xy^2\sqrt[3]{3x^2}$ (घ) $2ab\sqrt[4]{3a^2b}$

3. (क) $9\sqrt{5}$ (ख) $7\sqrt[3]{3}$ (ग) $5b\sqrt[4]{5b}$

अभ्यास : 2

1. (क) $\mathbf{4\sqrt{3}}$ (ख) $\mathbf{\sqrt{2}}$ (ग) $\sqrt{2}$ (घ) $\mathbf{-5(4\sqrt{3}+\sqrt{2})}$ (ङ) $\mathbf{5\sqrt{2}}$ (च) $\mathbf{3\sqrt[3]{5}}$ (छ) $\mathbf{11\sqrt{x}}$

2. (क) $\mathbf{19\sqrt{2}}$ (ख) $\mathbf{15\sqrt[3]{2}}$

अभ्यास : 3

1. (क) 52 (ख) $2\sqrt[3]{5}$ (ग) $\mathbf{30\sqrt[3]{30}}$

2. (क) $6\sqrt{6}-6\sqrt{2}-14\sqrt{3}+14$ (ख) $16x-9y$ (ग) $x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$ (घ) 1

(ङ) 1 (च) $(9+\sqrt{15})$ (छ) $x+2a\sqrt{xy}+a^2y$

अभ्यास : 4

1. (क) $\mathbf{15\sqrt{\frac{3}{2}}}$ (ख) $\frac{xz^2}{3}\sqrt[3]{\frac{y^2}{3xz^2}}$

2. (क) 5 (ख) $\frac{3}{2}$

अभ्यास : 5

(क) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ (ख) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ (ग) $\mathbf{2-\sqrt{3}}$ (घ) $\frac{3}{2\sqrt{5}-1}$

(ङ) $\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}$ (च) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ (छ) $\frac{1}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$ (ज) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$ (झ) $\frac{6-4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}$

अभ्यास : 6

1. (क) $\mathbf{2\sqrt{5}}$ (ख) $\mathbf{2\sqrt{15}}$ (ग) $\mathbf{16-\sqrt{3}}$ (घ) $\mathbf{2x}$ (ङ) $\mathbf{-4x\sqrt{x^2-1}}$

अभ्यास : 7

1. (क) **16** (ख) **4** (ग) **28**
2. (क) $\mathbf{-5}$ (ख) **20**
3. (क) **121** (ख) $\mathbf{2\frac{1}{4}}$
4. (क) $\mathbf{x=4}$ (ख) $\mathbf{x=2}$
5. (क) $\mathbf{1\frac{1}{4}}$ (ख) $\mathbf{\frac{1}{4}}$

7. **सारांश** :

थप अभ्यासका लागि कक्षा १० को पाठ्यपुस्तक अध्ययन गर्नुहोस् । अनानुपातिक, अनुपातिक, सर्ड सङ्ख्या धारणा बुझेपछि अनानुपातिक सङ्ख्याको साधारण क्रियामा ध्यान दिनु पर्छ । यसपछि मात्र साधारणमुलक समीकरण हल गर्ने समस्या समाधान गर्नु पर्दछ ।

एकाइ : 10

घाताङ्क (Indices)

1. **परिचय** :

यस एकाइमा घाताङ्कका साधारण नियम प्रयोग गरी वीज गणितीय पदहरूको सरलीकरण र घाताङ्कमा चल भएका वर्ग समीकरणको विषयवस्तु समावेश गरिएका छन् ।

2. **सिकाई उपलब्धि** :

यस एकाइको अध्ययन पछि निम्न लिखित सिकाइ उपलब्धि हासिल हुनेछ :

"घाताङ्क सम्बन्धी वीजीय अभिव्यञ्जकहरूको सरलीकरण तथा समीकरण हल गर्न" ।

3. **आधारभूत विषय वस्तु** :

यस एकाइमा हामी घाताङ्कको साधारण नियमहरू प्रयोग गरी बीजगणितीय पदहरूको सरलीकरण गर्नुका साथै घाताङ्कसँग सम्बन्धित बीजीय भिन्नहरूको समेत सरलीकरण गर्ने तरिकाबारे छलफल गर्नेछौं ।

a^x मा a लाई आधार र x लाई घात भनिन्छ । जहाँ a को मान बाहेक अन्य वास्तविक सङ्ख्या लिन सकिन्छ ।

4. **मुख्य विषयवस्तु** :

घताङ्क सम्वन्धी नियमहरू

1. यदि $x \neq 0$ भएमा $x^m \times x^n = x^{m+n}$ र $x^m \times x^{-n} = x^{m-n}$ हुन्छ अर्थात् जसका आधार एउटै हुन्छन् । त्यसका घाताङ्कहरू जोड्नुपर्दछ ।

जस्तै : $x^5 \times x^4 = x^{5+4} = x^9$ र $x^5 \times x^{-4} = x^{5-4} = x^1 = x$

2. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ हुन्छ । त्यसैले आधार एउटै भएका पदहरू बीच भाग क्रिया गर्दा अंशको पदको घाताङ्कबाट हरको पदको घाताङ्क घटाउनु पर्दछ ।

जस्तै : $\frac{x^6}{x^2} = x^{6-2} = x^4$

3. $(x^m)^n = x^{mn}$ घाताङ्कसहित रहेको कुनै पद वा अभिव्यञ्जकको पुनः घाताङ्क भएमा ती घाताङ्कहरू गुणन गर्नुपर्दछ ।

जस्तै : $(x^4)^5 = x^{4\times5} = x^{20}$

किनकि $(x^4)^5 = x^4 \times x^4 \times x^4 \times x^4 \times x^4$

4. $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$ कुनै बीजीय भिन्नको घाताङ्क उही हुन्छ भने अंश र हरको घाताङ्क पनि उही हुन्छ । जस्तैः $\frac{x^3}{y^3} = \left(\frac{x}{y}\right)^3$

5. $x^0 = 1$, अर्थात कुनै पनि पद वा अभिव्यञ्जकको घाताङ्क शून्य (Zero) भएमा त्यसको मान 1 हुन्छ ।

जस्तै : $\frac{x^m}{x^m} = 1$ $\frac{x}{x} = 1$

अथवा, $x^{m-m} = 1$ $\frac{x^1}{x^1} = x^1 \times x^{-1} = x^{1-1} = x^0$

अथवा, $x^0 = 1$ $\therefore x^0 = 1$ हुन्छ ।

6. $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ र $\frac{1}{x^{-m}} = x^m$ कुनै पद वा अभिव्यञ्जकको घाताङ्क अंशमा भए हरमा र हरमा भए अंशमा लग्दा घाताङ्कको ऋणात्मक चिह्न परिवर्तन हुन्छ । अर्थात धनात्मक भए ऋणात्मक र ऋणात्मक भए धनात्मक हुन्छ ।

जस्तै : $x^m = \frac{1}{x^{-m}}$

अथवा, $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$

7. कुनै पनि पद अभिव्यञ्जक मूलचिह्न (radical sign) भित्र रहेमा मूलचिह्न हटाउँदा घाताङ्कको अंशमा 1 र हरमा मूलचिह्नको अवस्था अनुरूप निर्धारण गर्नुपर्दछ ।

जस्तैः $\sqrt{x} = x^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ $\sqrt[3]{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[4]{x^3} = (x^3)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{3}{4}}$

$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ $\sqrt[m]{x^n} = (x^n)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{n}{m}}$

$\sqrt[\frac{1}{m}]{x} = x^m$

सारांशमा घताङ्क सम्वन्धी नियमहरू

(i) $\mathbf{x^a \times x^b = x^{a+b}}$ (ii) $\mathbf{\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}}$ (iii) $\mathbf{(x^m)^n = x^{m\times n}}$

(iv) $\mathbf{\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}}$ (v) $\mathbf{x^0 = 1}$ (vi) $\mathbf{x^{-m} = \frac{1}{x^m}}$

(vii) $\mathbf{\frac{1}{x^{-m}} = x^m}$ (viii) $\mathbf{\sqrt[a]{x^b} = x^{b/a}}$ (ix) $\mathbf{x^a = y^b \ \therefore x = y^{\frac{b}{a}}}$

उदाहरण : 1

(क) सरल गर्नुहोस् : $(64)^{-2/3}$

यसलाई सरल गर्न, ऋणात्मक चिह्न हटाउनुपर्छ । यसका लागि $x^{-m}=\frac{1}{x^m}$ नियम प्रयोग गर्नुपर्छ ।

अर्थात्, $\frac{1}{(64)^{2/3}}$

अथवा, $\frac{1}{4^{3\times 2/3}}$ (64 लाई 4^3 बनाएको)

अथवा, $\frac{1}{4^2}$

$=\frac{1}{16}$ उत्तर

(ख) सरल गर्नुहोस् : $\sqrt{a^3b^4}\times\sqrt[3]{a^4b^{-3}}$

यसलाई सरल गर्न, मूलचिह्न हटाउनुपर्छ ।

$(a^3b^4)^{\frac{1}{2}}\times(a^4b^{-3})^{\frac{1}{3}}$ $\left[\sqrt[a]{x^b}=x^{\frac{b}{a}}\right]$

$= a^{3\times\frac{1}{2}}b^{4\times\frac{1}{2}}\times a^{4\times\frac{1}{3}}\times b^{-3\times\frac{1}{3}}$ $[(x^m)^n=x^{m\times n}]$

$= a^{3/2}\,b^2\times a^{4/3}\times b^{-1}$

$= a^{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}\ \ b^{2-1}$ $\left[x^a\times x^b=x^{a+b}\right]$

$= (a)^{\frac{17}{6}}.b$ उत्तर

(ग) सरल गर्नुहोस् : $\frac{3^{x+2}-3^x}{4\times3^x}$

यसलाई सरल गर्न, 3^{x+2} लाई खण्डीकरण गर्नुपर्छ ।

अर्थात, $\frac{3^x.3^2-3^x}{4\times3^x}$

$=\frac{3^x(3^2-1)}{4\times3^x}$ [3^x साझा लिएको]

$=\frac{8}{4}=2$ उत्तर

(घ) सरल गर्नुहोस् : $\frac{1}{1-a^{x-y}}+\frac{1}{1-a^{y-x}}$

यसलाई सरल गर्न a^{x-y} लाई खण्डीकरण गर्नुपर्छ ।

$=\frac{1}{1-\frac{a^x}{a^y}}+\frac{1}{1-\frac{a^y}{a^x}}$

$$= \frac{1}{\frac{a^y - a^x}{a^y}} + \frac{1}{\frac{a^x - a^y}{a^x}}$$ [हरमा सरल गरेको]

$$= \frac{a^y}{a^y - a^x} + \frac{a^x}{a^x - a^y}$$

$$= \frac{a^y}{a^y - a^x} - \frac{a^x}{a^y - a^x}$$ [$a^x - a^y$ लाई $-a^y + a^x = -(a^y - a^x)$ गरेको ।]

$$= \frac{a^y - a^x}{a^y - a^x}$$ [सरल गर्दा]

$= 1$ उत्तर

अभ्यास : 1

1. सरल गर्नुहोस् ।

(क) $a^x \times a^y$ (ख) $a^x \times b^x$ (ग) $k^x \div k^y$

2. सरल गर्नुहोस् :

(क) $216^{\frac{-2}{3}}$ (ख) $6561^{\frac{-3}{4}}$ (ग) $\frac{1}{64^{-1/2}} \times 32^{\frac{1}{5}}$

(घ) $25^{3/2} - \sqrt[3]{64^2}$ (ङ) $(x^{-1}\, y^{-2}\; z^{-4})^{-1/6} \times \sqrt[3]{x\, y^{-1} c^{-2}}$

(च) $\sqrt[3]{(64a^3 \div 27a^{-3})^{-2}}$ (छ) $\sqrt[3]{27x^6\, y^3} \div \sqrt[3]{81x^8\, y^4}$

(ज) $\frac{2^{x+3} \cdot 2^{x+2}}{2^{x+3}}$ (झ) $\frac{\mathbf{3^{3x+3} - 3^{3x+1}}}{\mathbf{6 \times 27^x}}$ (ञ) $\frac{27^{3x+1}\,(243)^{-\frac{4x}{4}}}{9^{x+5} \cdot 3^{3x-7}}$

(ट) $\frac{4^n \times 2^{2n}}{2^{n-1} \times 2^n \times 2}$ (ठ) $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^{b-a}+1}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^{a-b}+1}}$ (ड) $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{1+y^{p-q}}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{1+y^{q-p}}}$

उदाहरण : 2

सरल गर्नुहोस् :

(क) $\left(\frac{b^x}{c^x}\right)^y \times \left(\frac{c^y}{a^y}\right)^x \times \left(\frac{a^x}{b^x}\right)^y$

$$= \frac{b^{xy}}{c^{xy}} \times \frac{c^{xy}}{a^{xy}} \times \frac{a^{xy}}{b^{xy}}$$ [$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$ जस्तै गरेको]

$= 1$ उत्तर

(ख) $\sqrt[a+b]{y^{a^2-b^2}} \times \sqrt[b+c]{y^{b^2-c^2}} \times \sqrt[c+a]{y^{c^2-a^2}}$

$$= y^{\left[(a^2+b^2) \times \frac{1}{(a+b)}\right]} \times y^{\left[(b^2-c^2) \times \frac{1}{(b+c)}\right]} \times y^{\left[(c^2-a^2) \times \frac{1}{(c+a)}\right]}$$

$$\left[\sqrt[x]{x^a} = x^{a\times\frac{1}{x}} \text{ प्रयोग गर्दा }\right]$$

$$= y^{\left[(a+b)(a-b)\times\frac{1}{(a+b)}\right]} \times y^{\left[(b+c)(b-c)\times\frac{1}{(b+c)}\right]} \times y^{\left[(c+a)(c-a)\right]\times\frac{1}{(c+a)})}$$

$$[a^2 - b^2 \text{ को सूत्र राखेको }]$$

$$= y^{a-b} \times y^{b-c} \times y^{c-a}$$

$$= y^{a-b+b-c+c-a} = 1$$

[उही आधार भएका पदहरूको गुणा गर्दा घाताङ्क जोडिन्छ। $a^x a^y = a^{x+y} = y^0 = 1$ उत्तर]

अभ्यास : 2

1. सरल गर्नुहोस्।

(क) $\left(\frac{x}{x^c}^{a+b}\right)^{a-b} \times \left(\frac{x}{x^a}^{b+c}\right)^{b-c} \times \left(\frac{x}{x^b}^{c+a}\right)^{c-a}$

(ख) $\sqrt[\frac{1}{ab}]{\frac{x^{\frac{1}{a}}}{x^{\frac{1}{b}}}} \times \sqrt[\frac{1}{bc}]{\frac{x^{\frac{1}{b}}}{x^{\frac{1}{c}}}} \times \sqrt[\frac{1}{ca}]{\frac{x^{\frac{1}{c}}}{x^{\frac{1}{a}}}}$

नोटः $\sqrt[\frac{1}{ab}]{(\ \ )}$ मा मूलचिह्न हटाउन $(\ \ )^{ab}$ गर्ने।

2. (क) $\left(\frac{x^{a^2+b^2}}{x^{-ab}}\right)^{a-b} \times \left(\frac{x^{b^2+c^2}}{x^{-bc}}\right)^{b-c} \times \left(\frac{x^{c^2+a^2}}{x^{b}}\right)^{c-a}$

(ख) $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab-b^2} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc-c^2} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{cb^2+ca-a^2}$

(ग) $\sqrt[bc]{\frac{x^b}{x^c}} \times \sqrt[ca]{\frac{x^c}{x^a}} \times \sqrt[ab]{\frac{x^a}{x^b}}$

(घ) $\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^p \left(x-\frac{1}{y}\right)^{q-p}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^q \left(y+\frac{1}{x}\right)^{p-q}}$

(ङ) $\frac{\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{x-y}} \left(1-\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x-y}}}{\left(\frac{y}{x}+1\right)^{\frac{x}{x-y}} \left(\frac{y}{x}-1\right)^{\frac{y}{x-y}}}$

(च) $\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{c-b}} + \frac{1}{1+x^{b-c}+x^{a-c}} + \frac{1}{1+x^{c-a}+x^{b-a}}$

उदाहरण : 3

यदि $pqr = 1$ भए, $\frac{1}{1+p+q^{-1}} + \frac{1}{1+q+r^{-1}} + \frac{1}{1+r+p^{-1}} = 1$ हुन्छ भनी प्रमाणित

गर्नुहोस् ।

समाधान :

$$\frac{1}{1+p+q^{-1}}+\frac{1}{1+q+r^{-1}}+\frac{1}{1+r+p^{-1}}$$

$$=\frac{1}{1+p+\frac{1}{q}}+\frac{1}{1+q+r^{-1}}+\frac{1}{1+r+p^{-1}}$$

$$=\frac{1}{\frac{1+q+1}{q}}+\frac{1}{1+q+r^{-1}}+\frac{1}{1+r+p^{-1}}$$

$$=\frac{q}{q+p^{-1}+1}+\frac{1}{1+q+r^{-1}}+\frac{1}{1+r+p^{-1}}$$ [$\therefore pq=\frac{1}{q}=r^{-1}$ भएकोले]

$$=\frac{1}{1+q+r^{-1}}+\frac{1}{1+r+p^{-1}}$$

$$=\frac{q+1}{1+q+\frac{1}{r}}+\frac{1}{1+r+p^{-1}}$$

$$=\frac{q+1}{\frac{r+qr+1}{r}}+\frac{1}{1+r+p^{-1}}$$

$$=\frac{r(q+1)}{r+qr+1}+\frac{1}{1+r+p^{-1}}$$

$$=\frac{qr+r}{r+qr+1}+\frac{1}{1+r+p^{-1}}$$ [$\therefore qr=\frac{1}{p}=p^{-1}$ भएकोले]

$$=\frac{p^{-1}+r}{r+p^{-1}+1}+\frac{1}{1+r+p^{-1}}$$

$$=\frac{p^{-1}+r+1}{1+p^{-1}+r}=1$$ प्रमाणित भयो ।

अभ्यास : 3

1. (क) यदि $a+b+c=0$ भए, प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\frac{1}{1+x^{a}+x^{-b}}+\frac{1}{1+x^{b}+x^{-c}}+\frac{1}{1+x^{c}+x^{-a}}=1$$

(ख) यदि $abc=1$ भए, प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\frac{1}{1+a+b^{-1}}+\frac{1}{1+b+c^{-1}}+\frac{1}{1+c+a^{-1}}=1$$

2. प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}+xy}{xy-y^{3}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-y}=\frac{\sqrt{x}}{y}$$

उदाहरण : 4

(क) हल गर्नुहोस् : $2^{x+3} = 16$

समाधान : समीकरण $2^{x+3} = 16$ मा

बराबर चिह्नको दुवैतिर एकपदमात्र रहेकोले दुवैतिरका आधारहरू उही बनाउनुपर्छ ।

$2^{x+3} = 2^4$ [किनभने $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$]

दुवैतिरका आधारहरू बराबर भएकोले घाताङ्कहरू पनि बराबर हुनै पर्छ ।

त्यसैले, $x + 3 = 4$

$\therefore x = 4 - 3 = 1$

उत्तर जाँचेर हेर्दा,

$2^{1+3} = 16$

वा, $2^4 = 16$

वा, $16 = 16$

दुवैतर्फका मानहरू बराबर भएकोले उत्तर मिल्यो ।

(ख) हल गर्नुहोस् : $2^{x+2} + 2^x = 5$

समाधान : $2^{x+2} + 2^x = 5$ मा

बराबर चिह्नको एकापट्टि रहेको दुईपदीय अभिव्यञ्जकलाई खण्डीकरण गरी एकपदीय बनाउनुपर्छ ।

$2^x \times 2^2 + 2^x = 5$ [$\because x^{m+n} = x^m \times x^n$ हुन्छ]

वा, $2^x(2^2 + 1) = 5$ [2^x साझा लिएको]

वा, $2^x = \frac{5}{5}$

वा, $2^x = 1$

वा, $2^x = 2^0$ [$x^0 = 1$ हुने भएकोले]

$\therefore x = 0$

(ग) हल गर्नुहोस् : $3^{2x} - 4 \times 3^x + 3 = 0$

समाधान : $3^{2x} - 4 \times 3^x + 3 = 0$ मा

बराबर चिह्नको एकापट्टी रहेका पदहरू मध्ये 3^x साझा लिन नसकिने भएकोले यसलाई वर्गसमीकरणको रूपमा राख्नुपर्छ ।

$(3^x)^2 - 4 \times 3^x + 3 = 0$

यहाँ, $3^x = a$ मानौं ।

$a^2 - 4a + 3 = 0$

वा, $a^2 - (3 + 1)a + 3 = 0$

वा, $a^2 - 3a - 1a + 3 = 0$

वा, $a(a - 3) - 1(a - 3) = 0$

वा, $(a - 3)\ (a - 1) = 0$

a को मान प्रतिस्थापन गर्दा,

$(3^x - 3)(3^x - 1) = 0$

यदि $3^x - 3 = 0$ भए $3^x = 3^1$ हुन्छ । त्यसैले $x = 1$ भयो ।

यदि $3^x - 1 = 0$ भए $3^x = 1$ हुन्छ । त्यसैले $3^x = 3^0$ भयो । त्यसकारण, $x = 0$ हुन्छ ।

अतः $x = 1, 0$

(घ) हल गर्नुहोस् : $3^x + \frac{1}{3^x} = 9\frac{1}{9}$

समाधान : $3^x + \frac{1}{3^x} = 9\frac{1}{9}$ मा

$3^x = a$ मानौँ ।

तब, $a + \frac{1}{a} = \frac{82}{9}$

वा, $\frac{a^2+1}{a} = \frac{82}{9}$ [सरल गरेको]

वा, $9a^2 + 9 = 82a$

वा, $9a^2 - 82a + 9 = 0$

वा, $9a^2 - (81 + 1)a + 9 = 0$ [खण्डीकरण गरेको]

वा, $9a^2 - 81a - a + 9 = 0$

वा, $9a(a - 9) - 1(a - 9) = 0$

वा, $(a - 9)(9a - 1) = 0$

a को मान प्रतिस्थापन गर्दा,

$(3^x - 9)(9 \times 3^x - 1) = 0$

यदि $3^x - 9 = 0$ भए $3^x = 9$ वा $3^x = 3^2$ हुन्छ । त्यसैले $x = 2$ भयो ।

यदि $9 \times 3^x - 1 = 0$ भए $9 \times 3^x = 1$ वा $3^x = \frac{1}{9}$ वा $3^x = 3^{-2}$ $\therefore x = -2$ हुन्छ ।

$\therefore x = \pm 2$

नोट : (ख), (ग) र (घ) का समीकरणहरूमा x का उत्तरहरू प्रतिस्थापना गरी उत्तर मिल्छ वा मिल्दैन जाँचेर हेर्नुहोस् ।

अभ्यास : 4

हल गर्नुहोस् ।

1. (क) $25^{x-1} = 1$ (ख) $2^{x-1} = 16$

	(ग)	$(2^{x+2})^x = 1$	(घ)	$5(9^{x-1}) = 135$
	(ङ)	$9^{x+1} = \sqrt[5]{3^x}$	(च)	$4(2^x) = 128$
	(छ)	$(2^{x-2})^x = 2^{x-1}$	(ज)	$2^{3x+1} = 1$
	(झ)	$36^{x-1} = 1$	(ञ)	$4^{x-2} - 5 = 27$
2.	(क)	$3^{x+1} - 3^x = 54$	(ख)	$3^{x+3} - 3^x = 78$
	(ग)	$2^{x+1} - 2^{x-1} = 12$	(घ)	$2^{x+1} - 2^x = 16$
	(ङ)	$2^{x+1} + 2^{x+3} = 320$	(च)	$3^x - 3^{x-1} = 2$
	(छ)	$2^{x-2} + 2^x = 5$	(ज)	$3^{x+1} + 3^x = 108$
	(झ)	$4^x - 4^{x-1} = 192$	(ञ)	$3^{2x+1} + 3^{2x-1} = 90$
3.	(क)	$4^x - 3 \times 2^x + 2 = 0$	(ख)	$9^x - 2(3^x) - 3 = 0$
	(ग)	$25^x - 30(5^x) + 125 = 0$	(घ)	$3^{2x} - 3^{x+1} = -2$
	(ङ)	$9^x - 10 \times 3^x + 9 = 0$	(च)	$4^x - 3 \times 2^{x+3} + 128 = 0$
	(छ)	$2^x + \frac{1}{2^x} = 2\frac{1}{2}$	(ज)	$5^x + \frac{1}{5^x} = 25\frac{1}{25}$

5. पृष्ठपोषण

सबै अभ्यासका प्रश्नहरू उदाहरण अनुसार हल गर्नुहोस् ।

उत्तरहरू

उदाहरण : 1 सँग सम्बन्धित अभ्यास

नोटः उदाहरणमा दिइए जस्तै घाताङ्कका नियमहरू प्रयोग गरी सरल गर्नुहोस् ।

1. (क) a^{x+y} (ख) $(ab)^x$ (ग) k^{x-y}

2. (क) $\frac{1}{36}$ (ख) $\frac{1}{729}$ (ग) 16 (घ) 109 (ङ) $x^{\frac{1}{2}}$ (च) $\frac{9}{16^4}$ (छ) $\left(\frac{1}{3x^2y}\right)^{\frac{1}{3}}$

(ज) $\frac{1}{2}$ (झ) 1 (ञ) 1 (ट) 4^n (ठ) 1 (ड) 1

उदाहरण : 2 सँग सम्बन्धित अभ्यास

1. (क) 1 (ख) 1

2. (क) 1 (ख) 1 (ग) 1 (घ) $\left(\frac{x}{y}\right)^{p+q}$ (ङ) $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x+y}{x-y}}$ (च) 1

अभ्यास : 3 सँग सम्बन्धित अभ्यास

1. (क) $a+b+c = \delta$ मानी दुई दुई ओटा पदहरू समाधान गर्नुहोस् ।

   (ख) $bc = a-1$

   $ac = b-1$

   $ab = c-1$ मानी समाधान गर्नुहोस् ।

2. $x^{3/2}$ लाई $x\sqrt{3}$ मान्नुहोस् र समाधान गर्नुहोस् ।

अभ्यास : 4 सँग सम्बन्धित अभ्यासहरू

उत्तर : (यसमा दिइएको प्रत्येक प्रश्नहरू उदाहरण (क), (ख), (ग) र (घ) अनुसार हल गर्नुहोस् ।

1.	(क) 1	(ख) 5	(ग) $0, -2$	(घ) $\mathbf{2\frac{1}{2}}$	(ङ) $\left(-\mathbf{1}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\right)$
	(च) 5	(छ) 1	(ज) $-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$	(झ) 1	(ञ) $4\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$
2.	(क) 3	(ख) 1	(ग) 3	(घ) **4**	(ङ) 5
	(च) 1	(छ) 2	(ज) 3	(झ) 4	(ञ) $2\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$
3.	(क) 0, 1	(ख) 1	(ग) 1, 2	(घ) 0	(ङ) 0, 2
	(च) 3, 4	(छ) ± 1	(ज) ± 2		

6. **सारांश :**

   घाताङ्कयुक्त समीकरणमा चल राशी जहिले पनि घाताङ्कमा हुन्छ । दुबै पक्षको आधार बराबर भएका घाताङ्क पनि बराबर हुन्छ ।

एकाइ : 11

बीजीय भिन्न (Algebraic Fraction)

1. **परिचय** :

यस एकाइमा बिजीय भिन्नहरू समावेश भएका अभिव्यञ्जकहरूको सरलीकरण गर्ने तरिकाहरू बारे अध्ययन गरिने छ । सरलीकरण गर्न ल.स. र म.स. को ज्ञान हुनु पर्दछ । साथै भिन्नको सरल गर्ने तरिकाको ज्ञान आवश्यक पर्छ ।

2. **सिकाई उपलब्धि** :

यस एकाइको अध्ययन पछि निम्न लिखित सिकाइ उपलब्धि हासिल हुनेछ । "बीजीय भिन्न प्रयोग भएका समस्याहरू सरलीकरण गर्न ।"

3. **आधारभूत विषय वस्तु** :

$\frac{2}{x-3}$ परिभाषित हुन $x - 3 \neq 0$ हुनुपर्छ ।

बीजीय भिन्नहरूको जोड र घटाउ गर्न भिन्नहरूको हर समान बनाउनु पर्छ ।

जस्तै : $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$

$= \frac{1\ x(x-3)}{(x-2)(x-3)} + \frac{1 \times (x-2)}{(x-3)(x-2)}$

$= \frac{x-3+x-2}{(x-2)(x-3)} = \frac{2x-5}{(x-2)(x-3)}$

{दिइएको भिन्नको हरले समान हर बनेको भिन्नलाई भाग गरेर आएको भागफलले हरेक भिन्नको अंशलाई गुणन गर्नुपर्छ । अथवा हर र अंशलाई एउटै परिमाणले गुणन गर्दा गुणनफल बराबर हुन्छ ।}

सरलीकरण गरी आएको भिन्नलाई न्यूनतम पदमा लैजानु पर्छ ।

जस्तै : $\frac{x^2-9}{(x-3)^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2} = \frac{x+3}{x-3}$

4. **मुख्य विषय वस्तु** :

यहाँ हामी बढीमा 3 पद भएका बीजीय भिन्नहरूको सरलीकरण सम्बन्धी अध्ययन गर्ने छौं । हर र अंशलाई खण्डीकरण गरी म.स. र ल.स. को अवधारणा यहाँ प्रयोग गरिन्छ ।

5. **उदाहरण तथा अभ्यासहरू** :

उदाहरण : 1

निम्न उदाहरणहरू छलफल गरौं ।

(क) सरल गर्नुहोस् : $\frac{m^2}{m-n} + \frac{n^2}{n-m}$

सबैभन्दा पहिले दुवै हरलाई समान बनाउनुपर्छ । किनभने m–n र n-m बराबर छैनन् । (

पहिलो पदको हरमा m धनात्मक छ भने दोस्रो पदको हरमा **m** ऋणात्मक छ ।)

त्यसैले, n-m=-m+n=-(m-n) हुन्छ ।

अर्थात् $\frac{m^2}{m-n}+\frac{n^2}{n-m}=\frac{m^2}{m-n}-\frac{n^2}{m-n} = \frac{m^2-n^2}{m-n}$

$=\frac{(m+n)(m-n)}{m-n} = (m+n)$ उत्तर

(ख) सरल गर्नुहोस् : $\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}$

तीनओटै पदका हरहरू ab, bc र ca छन् । त्यसैले ab, bc र ca को ल.स. निकाल्दा abc हुन्छ । सबै पदको हर समान बनाउन पहिलो पदलाई c ले, दोस्रो पदलाई a ले र तेस्रो पदलाई b ले गुणा गर्नुपर्छ । तर प्रत्येक पदको हरमा जे ले गुणा गरेको छ अंशमा पनि त्यसैले गुणा गर्नुपर्दछ ।

त्यसैले, $\frac{(a-b)}{ab}+\frac{(b-c)}{bc}+\frac{(c-a)}{ca} = \frac{c(a-b)}{abc}+\frac{a(b-c)}{abc}+\frac{b(c-a)}{abc}$

$= \frac{ca-bc+ab-ac+bc-ab}{abc}=\frac{0}{abc} = 0$ उत्तर

अभ्यास : 1

1. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{64p^2}{8p-3q}+\frac{9q^2}{3q-8p}$ (ख) $\frac{81m^2}{9m-7n}+\frac{49n^2}{7n-9m}$

(ग) $\frac{x^2}{y(x-y)}+\frac{y^2}{x(y-x)}$ (घ) $\frac{1}{(a-b)}+\frac{1}{(b-c)}+\frac{1}{(c-a)}$

(ङ) $\frac{x^2+y^2}{xy}-\frac{x^2}{y(x+y)}-\frac{y^2}{y(x+y)}$ (च) $\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{2x}{x^4+x^2+1}$

2. सरल गर्नुहोस् ।

(क) $\frac{1}{8\,(1-\sqrt{a})}+\frac{2\sqrt{a}}{8(1-a)}$ (ख) $\frac{1-y^3}{1-u^2}+\frac{1-y^2}{1+2y+y^2}$

उदाहरण : २

(क) सरल गर्नुहोस् :

$\frac{b}{a+b}+\frac{b}{a-b}+\frac{2ab}{a^2+b^2}$

समाधान :

हरमा समान घाताङ्क भएका पदहरूको पहिले सरल गर्नुपर्छ ।

$$= \frac{b(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)} + \frac{2ab}{(a^2+b^2)}$$

$$= \frac{ab-b^2+ab+b^2}{(a^2-b^2)} + \frac{2ab}{(a^2+b^2)}$$

$$= \frac{2ab}{(a^2-b^2)} + \frac{2ab}{(a^2+b^2)}$$

फेरि हरमा समान घाताङ्क भएका पदहरूको सरल गर्नुपर्छ ।

$$= \frac{2ab(a^2+b^2)+2ab(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}$$

$$= \frac{2a^3b+2ab^3+2a^3b-2ab^3}{(a^4-b^4)}$$

$= \frac{4a^3b}{(a^4-b^4)}$ उत्तर

(ख) सरल गर्नुहोस् :

$$\frac{1}{(x-3)(x+2)} + \frac{3}{(x+2)(4-x)} + \frac{2}{(x-3)(x-4)}$$

समाधान :

$= \frac{1}{(x-3)(x+2)} - \frac{3}{(x+2)(4-x)} + \frac{2}{(x-3)(x-4)}$ [4-x = -(x-4) गर्नुहोस ।]

$$= \frac{(x-4)-3(x-3)+2(x+2)}{(x+2)(x-3)(x-4)}$$

$$= \frac{x-4-3x+9+2x+4}{(x+2)(x-3)(x-4)}$$

$= \frac{9}{(x+2)(x-3)(x-4)}$ उत्तर ।

(ग) सरल गर्नुहोस् :

$$\frac{ax^2+b}{2x-a} + \frac{4ax^3}{1-4x^2} + \frac{ax^2-b}{2x+1}$$

समाधान :

$$\frac{ax^2+b}{2x-a} + \frac{4ax^3}{1-4x^2} + \frac{ax^2-b}{2x+1}$$

$$= \frac{ax^2+b}{2x-a} + \frac{ax^2-b}{2x+1} + \frac{4ax^3}{1-4x^2}$$

$$= \frac{ax^3(2x+1)+b(2x-1)+ax^2(2x-1)-b(2x-1)}{(2x-1)\,(2x+1)} + \frac{4ax^3}{1-4x^2}$$

$$= \frac{ax^3(2x+1+2x-1)+ b(2x+1+2x-1)}{4x^2-1} + \frac{4ax^3}{1-4x^2}$$

$$= \frac{4ax^3+4bx}{4x^2-1} + \frac{4ax^3}{4x^2-1}$$

$$= \frac{4ax^3+4bx-4ax^3}{4x^2-1}$$

$$= \frac{4bx}{4x^2-1}$$ उत्तर ।

अभ्यास : 2

1. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} - \frac{2ab}{a^2-b^2}$ (ख) $\frac{4}{x-1} + \frac{5}{x+1} + \frac{6}{x^2-1}$

(ग) $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} + \frac{2a}{b^2-a^2}$ (घ) $\frac{x+3}{x^2+3x+9} + \frac{x-3}{x^2-3x+9} - \frac{54}{x^4+9x^2+81}$

2. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{b}{a+b} - \frac{b}{a-b} + \frac{6b^2}{a^2-b^2}$ (ख) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$

(ग) $\frac{1}{1-x+x^2} - \frac{1}{1+x+x^2} - \frac{2x}{1+x^2+x^4}$ (घ) $\frac{1}{4(1-\sqrt{x})} + \frac{1}{4(1+\sqrt{x})} + \frac{2\sqrt{x}}{4(1-x)}$

3. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1}{(p-q)(p-r)} + \frac{1}{(q+r)(q-p)} + \frac{1}{(r-p)(r-q)}$

(ख) $\frac{x}{(x+3)(x-1)} + \frac{x-1}{(x+3)(2-x)} + \frac{(x-3)}{(2-x)(x-1)}$ (ग) $\frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{2}{x^2-4x+3} + \frac{3}{x^2-3x+2}$

4. सरल गर्नुहोस् ।

$$\frac{(x-y)^2-z^2}{x^2-(y+z)^2} + \frac{(y-z)^2-x^2}{y^2-(z+x)^2} + \frac{(z-x)^2-y^2}{z^2-(x+y)^2}$$

5. **पृष्ठपोषण** :

उदाहरण 2 सँग सम्बन्धित अभ्यासमा यसरी हल गर्दा जस्तै: 3(क) मा (q-p) = -(p-q) बनाउने ।

उत्तरहरू

उदाहरण (1) सँग सम्बन्धित अभ्यासहरू

1. (क) $8p + 3q$ (ख) $9m + 7n$ (ग) $\frac{x+y}{xy}$ (घ) $\frac{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ (ङ) 1 (च) $\frac{1}{x^{2-x+1}}$

2. (क) $\frac{1+3\sqrt{a}}{8(1-a)}$ (ख) $\frac{2+y^2}{1+y}$

उदाहरण (2) सँग सम्बन्धित अभ्यासको १(क) देखि (घ) सरल गर्दा पहिलो 2 वटा पदको L.C.M. लिई हल गर्ने, आएको पदलाई अन्तिम पदसमेत समावेश गरी हल गर्ने ।

जस्तै: (च) $\left\{\frac{x+3}{x^2+3x+9} + \frac{x-3}{x^2-3x+5}\right\} + \frac{54}{x^4+9x^2+81}$

1.	(क) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$	(ख) $\frac{9x-5}{x^2-1}$	(ग) 0	(घ) $\frac{2(x-3)}{x^2-3x+9}$
2.	(क) $\frac{4b^2}{a^2-b^2}$	(ख) $\frac{6(x^2+2)}{x^4-5x^2-4}$	(ग) 0	(घ) $\frac{1}{2(1-\sqrt{x})}$
3.	(क) 0	(ख) $\frac{x^2-10}{(x-1)(x-2)(x-3)}$	(ग) 0	
4.	(क) 1			

6. **सारांश :**

वीजीय भिन्नहरूको सरलीकरण गर्दा खण्डीकरण र ल.स.को प्रयोग हुन्छ ।

एकाइ : 12

समीकरण (Equation)

1. **परिचय :**

यस एकाइमा दुई चल समावेश भएका युगपथ रेखीय समीकरण र वर्ग समीकरणसँग सम्बन्धित शाब्दिक समस्याहरूका बारेमा अध्ययन गर्ने छौं ।

2. **सिकाइ उपलब्धि :**

यस एकाइको अध्ययनपछि निम्नलिखित सिकाइ उपलब्धि हासिल हुने छ ।

"दुई चलयुक्त युगपद रेखीय तथा वर्ग समीकरणका शाब्दिक समस्याहरू हल गर्न ।"

3. **आधारभूत विषय वस्तु :**

(क) x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

$x - y = 1$

$x + 2y = 13$

समाधान : हटाउने विधिद्वारा यसप्रकार हल गरिन्छ ।

दिइएका समीकरणहरूका चलहरू x को तलतिर x र y को तलतिर y नै राख्नुपर्छ । त्यस्तै सङ्ख्याका तल सङ्ख्या नै राख्नुपर्छ । जसले गर्दा हल गर्न सजिलो हुन्छ ।

$x - y = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$
$\underline{x \mathop{+}\limits_{-} 2y \mathop{=}\limits_{-} 13 \mathop{}\limits_{-}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$
{घटाउने विधिका लागि दिइएका दुई समीकरण मध्ये एउटाबाट अर्को घटाउनु पर्छ ।}

घटाउँदा, $-3y = -12$

$\therefore y = \frac{-12}{-3} = 4$

समीकरण (1) मा y को मान राख्दा,

$x - 4 = 1$

$\therefore x = 5$

त्यसैले $x = 5$, $y = 4$ उत्तर ।

यहाँ, जाँचेर हेर्न x र y को मान समीकरण (2) मा प्रतिस्थापन गरी हेरौंम ।

$5 + 2 \times 4 = 13$

$13 = 13$

त्यसैले x र y को मान ठिक भयो ।

नोटः यो जाँच गरेर हेर्ने कार्य समीकरण (1) मा पनि गर्न सकिन्छ ।

(ख) हल गर्नुहोस् : $3x + 2y = 12$

$2x - 5y = -11$

समाधान :

यसलाई हटाउने विधिद्वारा हल गर्न समीकरण (2) को x को गुणाङ्क 2 ले समीकरण (1) लाई र समीकरण (1) को x को गुणाङ्क 3 ले समीकरण (2) लाई गुणा गर्नुपर्छ ।

$2(3x + 2y = 12)$
$3(2x - 5y = -11)$

वा $6x + 4y = 24$
$\underline{6x \underset{+}{-} \underset{+}{15y} = \underset{+}{-33}}$

घटाउँदा $19y = 57$

$\therefore y = 3$

समीकरण (1) बाट, $\mathbf{3x + 2 \times 3 = 12}$

वा, $3x = 6$ अर्थात, $x = 2$

$\therefore x = 2$ र $y = 3$ हुन्छ ।

पुनः यसलाई प्रतिस्थापना विधिद्वारा निम्नप्रकार हल गरिन्छ :

$3x + 2y = 12 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$
$2x - 5y = -11 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

सर्वप्रथम स. (1) बाट x को वा y को मान निकाल्नुपर्छ ।

$3x + 2y = 12$

वा, $3x = 12 - 2y$

वा, $x = \frac{12-2y}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

x को यो मान स. **(2)** मा प्रतिस्थापन गर्दा !

$2x - 5y = -11$

वा, $2 \times \frac{12-2y}{3} - 5y = -11$

वा, $\mathbf{\frac{24 - 4y - 15y}{3} = -11}$

वा, $24 - 4y - 15y = -33$

वा, $-19y = -57 \qquad \therefore y = 3$

y को मान समीकरण (3) मा राख्दा,

$x = \frac{12-2y}{3}$

$= \frac{12-2\times3}{3}$

$= \frac{6}{3}$

$= 2$

$\therefore x = 2, \; y = 3$

नोट : समीकरण (2) बाट x वा y को मान पत्ता लगाई समीकरण (1) मा प्रतिस्थापन गरी x र y को मान पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

3. हल गर्नुहोस् ।

$$\frac{x}{2} + y = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{x}{3} - 2y = -8 \ldots.\ldots.\ldots (2)$$

समाधान :

यसलाई हटाउने विधिद्वारा हल गरी हेरौँ -

स. (1) लाई स. (2) को x को गुणाङ्क $\frac{1}{3}$ ले र स. (2) लाई स. (1) को x को गुणाङ्क $\frac{1}{2}$ ले दुबैपट्टि गुणा गर्दा,

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{x}{6} - y = -4$$

$$- \quad + \qquad +$$

घटाउँदा, $\frac{y}{3} + y = \frac{4}{3} + 4$

वा, $\frac{y+3y}{3} = \frac{4+12}{3}$

वा, $4y = 16$

$\therefore y = 4$

समीकरण (1) बाट x को मान पत्ता लगाउन यसमा $y = 4$ राख्दा;

$$\mathbf{\frac{x}{2} + 4 = 4}$$

वा, $\frac{x+8}{2} = 4$

वा, $x + 8 = 8$

वा, $x = 0$

$\therefore x = 0$ र $y = 4$

वर्गसमीकरण दुई किसिमका छन् । ती हुन् :

(अ) **शुद्ध वर्गसमीकरण** : यसमा कुनै पनि चल राशी (Variable) को दुईओटा मानहरू एउटै परिमाण तर चिह्नहरू धनात्मक र ऋणात्मक रूपमा रहन्छन् भने त्यो समीकरण शुद्ध वर्गसमीकरण हो । यसको स्वरूप $x^2 + a^2 = 0$ हुन्छ ।

जस्तै (i) $\mathbf{x^2 = a^2}$

$(\mathbf{x})^2 = (\pm\mathbf{a})^2$

$\therefore x = \pm a$ (जहाँ x का मानहरूको परिमाण एउटै तर फरक चिह्नमा छन्)

(ii) $\boldsymbol{x^2 - 4 = 0}$

अथवा, $(x)^2 - (2)^2 = 0$

अथवा, $(x + 2)(x - 2) = 0$

अब, $x + 2 = 0 \quad \therefore x = -2$

अथवा, $x - 2 = 0 \quad \therefore x = +2$

$\therefore x = \pm 2$

(आ) **मिश्रित वर्गसमीकरण** : कुनै वर्गसमीकरणको चल राशी (Variable) का दुईओटा मानहरू फरकफरक रूपमा हुन्छन् भने त्यो वर्गसमीकरणलाई मिश्रित वर्गसमीकरण भनिन्छ । यसको स्वरूप $ax^2 + bx + c = 0$ हुन्छ ।

जस्तैः $x^2 - 3x + 2 = 0$

or, $x^2 - 2x - x + 2 = 0$

or, $x(x - 2) - 1(x - 2) = 0$

or, $(x - 2)(x - 1) = 0$

or, $x - 2 = 0 \quad \therefore x = 2$

अथवा, $x - 1 = 0 \quad \therefore x = 1$

$\therefore x = 2, 1$ (यहाँ x का मानहरू माथि भनिए झैं फरक छन्)

वर्गसमीकरण हल गर्ने विधिहरू :

(i) **खण्डीकरण विधि** : दिइएको वर्गसमीकरणलाई माथि जस्तै खण्डीकरण गरी मान निकाल्ने प्रक्रिया यस अन्तर्गत पर्दछ ।

जस्तैः $x^2 - 5x + 6 = 0$

or, $x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$

or, $x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$

or, $(x - 3)(x - 2) = 0$

or, $x - 3 = 0 \quad \therefore x = 3$

अथवा, $x - 2 = 0 \quad \therefore x = 2$

$\therefore x = 3,\ 2.$

(ii) **वर्ग पूरा गर्ने विधिः** दिइएको समीकरणलाई वर्ग बनाई मान निकाल्ने प्रक्रिया यसअन्तर्गत पर्दछ ।

जस्तैः $x^2 - 5x + 6 = 0$

or $x^2 - 5x = -6$

or, $(x)^2 - 2.x.\frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6$ (दुबैतर्फ $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ जोडेको)

or, $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} - 6$

or, $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

or, $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\pm\frac{1}{2}\right)^2$

or, $x - \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}$

or, $x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$

$+$ चिह्न लिँदा, $x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$

$x = \frac{6}{2}$

$\therefore x = 3$

$-$ चिह्न लिँदा, $x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$

$x = \frac{4}{2}$

$\therefore x = 2$

$\therefore x = 3, 2.$

(iii) **सूत्र प्रयोग गर्ने विधि** : दिइएको वर्गसमीकरणलाई समीकरणको साधारण रूपसँग तुलना गरेर दिइएका सूत्रमा प्रतिस्थापन गरी x का मानहरू पत्ता लगाउने प्रक्रिया यसअन्तर्गत पर्दछ ।

जस्तैः $x^2 - 5x + 6 = 0$ ………… दिइएको समीकरण

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ ………… साधारण रूप

तुलना गर्दा, $a = 1,\ b = -5,$ र $c = 6$

प्राप्त मानहरूलाई, वर्गसमीकरणको सूत्रमा प्रतिस्थापन गर्दा,

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (यो सुत्र अर्को पेजमा स्थापित गरिएको छ ।)

$= \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}$

$= \frac{5\pm1}{2}$

यहाँ, + चिह्न लिँदा, $x = \frac{5+1}{2}$

$x = \frac{6}{2}$

$\therefore\ x = 3$

त्यसैगरी, − चिह्न लिँदा, $x = \frac{5-1}{2}$

$x = \frac{4}{2}$

$\therefore\ x = 2$

$\therefore\ x = 3, 2.$

नोट : माथि उल्लेख गरिएका तीनओटै विधिहरूबाट एउटै समीकरणलाई हल गर्न सकिन्छ र सबै विधिहरूबाट एउटै मानहरू प्राप्त हुन्छन् । समस्याको प्रकृतिअनुसार विधि चयन गर्नुपर्दछ । साथै सबै समस्याहरूको खण्डीकरण विधिबाट समाधान नहुन पनि सक्तछ ।

साधारण वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ को समाधान :

यहाँ, $ax^2 + bx + c = 0$ हुँदा, $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ कसरी हुन्छ ? हल गरेर हेरौँ ।

यहाँ, $ax^2 + bx + c = 0$

अथवा, $ax^2 + bx = -c$ (अचल पदलाई दायाँ राखिएको)

अथवा, $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$ -a ले भाग गरिएको, किनकि वर्ग पूरा गर्न x^2 को गुणाङ्क a हटाउँदा)

अथवा, $x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$

अथवा, $x^2 + 2.x.\left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$ (वर्ग पूरा गर्न दुवैतर्फ $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ थपिएको ।)

अथवा, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

अथवा, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

अथवा, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$

अथवा, $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

अथवा, $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\therefore\ x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

जुन x को आवश्यक मानहरू हुन् ।

निम्नलिखित उदाहरणहरू हेर्नुहोस् :

(क) हल गर्नुहोस् :

$2x^2 - 50x = 0$

यहाँ $2x^2 - 50x = 0$

अथवा, $2x(x - 25) = 0$ (साझा लिएको)

यहाँ, $2x$ र $(x - 25)$ को गुणनफल '0' भयो ।

त्यसैले, यदि $2x = 0$ भए $x = \frac{0}{2} = 0$ हुनुपदर्छ ।

अथवा, $x - 25 = 0$ भए $x = 25$ हुनुपर्छ ।

अतः $2x^2 - 50 = 0$ मा x को मान 0 वा 25 भएमा मात्र दिइएको समीकरण मान्य हुन्छ ।

त्यसैले $2x^2 - 50x = 0$ का मूलहरू 0 र 25 हुन् ।

यहाँ, $2x^2 - 50x = 0$ मा x को मान 0 राख्दा;

जाँच गरी हेर्दा, $2 \times 0^2 - 50 \times 0 = 0$

वा $0 - 0 = 0$

$\therefore 0 = 0$ भएकोले उत्तर मान्य भयो ।

फेरि $x = 25$ राख्दा;

$2 \times 25^2 - 50 \times 25 = 0$

वा, $2 \times 625 - 1250 = 0$

वा, $1250 - 1250 = 0$

$\therefore 0 = 0$ भएकोले उत्तर मान्य भयो ।

(ख) हल गर्नुहोस् : $4x^2 - 100 = 0$

यहाँ, $4x^2 - 100 = 0$

अथवा, $4(x^2 - 25) = 0$

अथवा, $x^2 - 25 = 0$

अथवा, $(x + 5)(x - 5) = 0$ [$a^2 - b^2$ को सूत्र प्रयोग गरेको]

यदि, $x + 5 = 0$ भए $x = -5$ हुन्छ ।

यदि, $x - 5 = 0$ भए $x = 5$ हुन्छ ।

अत : $x = \pm 5$ हुन्छ ।

यो $4x^2 - 100 = 0$ एउटा शुद्ध वर्गसमीकरण हो ।

यहाँ, $4x^2 - 100 = 0$ मा $x = -5$ राख्दा;

जाँच गरी हेर्दा, $4 \times (-5)^2 - 100 = 0$

वा, $4 \times 25 - 100 = 0$

वा, $100 - 100 = 0$

$\therefore 0 = 0$ भएकोले उत्तर मान्य भयो ।

त्यसैगरी; $x = 5$ राखी आफैँ जाँचेर हेर्नुहोस् ।

(ग) हल गर्नुहोस् : $4x(x + 1) = 15$

यस $4x(x + 1) = 15$ वर्ग समीकरणमा

$4x = 15$ र $x + 1 = 15$ गर्नु हुँदैन । किनभने मान निकाल्न गुणनखण्डहरूको गुणनफल बराबर '0' हुनै पर्छ ।

त्यसैले, $4x$ र $(x + 1)$ गुणन गरी $4x^2 + 4x - 15 = 0$ गर्नुपर्छ ।

अथवा, $4x^2 + (10 - 6)x - 15 = 0$ (खण्डीकरण प्रक्रिया गरेको)

अथवा, $4x^2 + 10x - 6x - 15 = 0$

अथवा, $2x(2x + 5) - 3(2x + 5) = 0$

अथवा, $(2x + 5)\ (2x - 3) = 0$

यदि $2x + 5 = 0$ भए $2x = -5$ हुन्छ तथा $x = \frac{-5}{2} = -2\frac{1}{2}$ हुन्छ ।

यदि $2x - 3 = 0$ भए $2x = 3$ हुन्छ तथा $x = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ हुन्छ ।

$\therefore x = -2\frac{1}{2}$ र $1\frac{1}{2}$ हुन्छ ।

नोटः यो $4x(x + 1) = 15$ एउटा मिश्रित समीकरण हो ।

(घ) हल गर्नुहोस् : $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{10}{3}$

यहाँ, $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{10}{3}$

अथवा, $\frac{(x-2)^2+(x+2)^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{10}{3}$ [बायाँ पक्षमा सरल गरेको]

अथवा, $\frac{x^2-4x+4+x^2+4x+4}{x^2-4} = \frac{10}{3}$

अथवा, $\frac{2x^2+8}{x^2-4} = \frac{10}{3}$

अथवा, $10x^2 - 40 = 6x^2 + 24$ [क्रसगुणा गरेको]

अथवा, $10x^2 - 6x^2 - 40 - 24 = 0$

अथवा, $4x^2 - 64 = 0$

अथवा, $x^2 - 16 = 0$

अथवा, $(x + 4)(x - 4) = 0$

यदि $x + 4 = 0$ भयो भने $x = -4$ हुन्छ ।

त्यस्तै, $x - 4 = 0$ भयो भने $x = 4$ हुन्छ ।

$\therefore x = \pm 4$ उत्तर ।

उत्तर जाँचेर हेर्दा, $\frac{4-2}{4+2} + \frac{4+2}{4-2} = \frac{10}{3}$ [x=4 दिइएको वर्ग समीकरणमा राखेको]

अथवा, $\frac{2}{6} + \frac{6}{2} = \frac{10}{3}$

अथवा, $\frac{1}{3} + \frac{3}{1} = \frac{10}{3}$

अथवा, $\frac{10}{3} = \frac{10}{3}$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष भयो । त्यसैले उत्तर मान्य भयो ।

त्यस्तै; $x = -4$ राखेर आफै जाँचेर हेर्नुहोस् ।

(ङ) हल गर्नुहोस् : $4x^2 - x + 1 = 0$

यसको खण्डीकरण हुँदैन । त्यसैले $ax^2 + bx + c = 0$ सँग यो समीकरण तुलना गर्नुपर्दछ ।

यहाँ, $a = 4$, $b = -1$ र $c = 1$ छ ।

त्यसपछि सूत्रको प्रयोग गर्नुपर्छ ।

सूत्रअनुसार,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times4\times1}}{2\times4}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1-16}}{8}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{8}$$ उत्तर ।

4. **मुख्य विषय वस्तु** :

उदाहरण : 1

(क) दुई धनात्मक सङ्ख्याहरूको योगफल 10 र फरक 2 छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, दुई धनात्मक सङ्ख्याहरू x र y छन् ।

जहाँ, $x > y$ छ ।

प्रश्नअनुसार,

$x + y = 10$ .... (i)

$x - y = 2$ .... (ii)

समीकरण (i) र (ii) जोड्दा

$2x = 12$

अथवा, $x = \frac{12}{2} = 6$

समीकरण (i) मा x को मान प्रतिस्थापन गर्दा

$6 + y = 10$

अथवा, $y = 10 - 6$

$= 4$

त्यसैले इस्ट धनात्मक सङ्ख्याहरू 4 र 6 छन् ।

(ख) दुई क्रमागत सङ्ख्याहरूको योगफल 81 भए ति सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान,

मानौं, दुई क्रमागत सङ्ख्याहरू x र y छन् ।

प्रश्नअनुसार,

$x + y = 81$ .... (i)

$x - y = 1$ .... (ii) क्रमागत सङ्ख्याहरूको फरक '1' हुने भएकाले ।

समीकरण (i) र (ii) जोड्दा

$2x = 82$

अथवा $x = \frac{82}{2} = 41$

फेरि, x को मान समिकरण (i) मा प्रतिस्थापन गर्दा

$41 + y = 81$

अथवा, $y = 81 - 21 = 40$

∴ इस्ट क्रमागत सङ्ख्याहरू 40 र 41 छन् ।

(ग) 2 वटा कलम र 3 वटा कापिको संयुक्त मूल्य रु. २८० पर्छ । त्यस्तैखाले 3 ओटा कलम र 5 ओटा कापिको संयुक्त मूल्य रु. 450 पर्छ । एउटा कापि र कलमको छुट्टा छुट्टै मूल्य कति पर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान,

मानौँ, एउटा कापिको मूल्य रु. y र

एउटा कलमको मूल्य रु. x पर्छ ।

प्रश्नअनुसार

$2x + 3y = 280$ .... (i)

$3x + 5y = 450$ .... (ii)

समिकरण (i) लाई 3 ले र समिकरण (ii) लाई 2 ले गुणन गरी आउने नयाँ समिकरणहरूलाई एकबाट अर्को घटाउँदा

$6x + 9y = 840$ ....(i)

$6x + 10y = 900$ .... (ii)

$\quad - \quad + \qquad +$

$-y = -60$

अथवा, $y = 60$

y को मान समिकरण (i) मा प्रतिस्थापन गर्दा

$2x + 3y = 280$

अथवा, $2x + 3 \times 60 = 280$

अथवा, $2x + 180 = 280$

अथवा, $2x = 280 - 180$

अथवा, $2x = 100$

अथवा, $x = \frac{100}{2} = 50$

त्यसैले, एउटा कलमको मूल्य रु. 50 र एउटा कापिको मूल्य रु. 60 पर्छ ।

अभ्यास : 1

1. (क) दुई सङ्ख्याहरूको योगफल 35 र फरक 5 भए ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ख) दुई क्रमागत सङ्ख्याहरूको योगफल 37 भए ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ग) एउटा सङ्ख्या अर्को सङ्ख्याको दोब्बर छ । यदि ति सङ्ख्याहरूको योगफल 42 भए तिनीहरूको फरक कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. 9 कि.ग्रा. स्याउ र 11 कि.ग्रा. सुन्तलाको मूल्य रु. 690 तथा 15 कि.ग्रा. स्याउ र 6 कि.ग्रा. सुन्तलाको रु. 780 पर्छ भने प्रत्येकको एक कि.ग्रा. को मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. 4 कि.ग्रा. आलु र 2 कि.गा. प्याजको मूल्य रु. 124 पर्छ । यदि 3 कि.ग्रा. आलु र 3 कि.ग्रा. प्याजको मूल्य रु. 138 पर्छ भने प्रति कि.ग्रा. आलु र प्याजको छुट्टाछुट्टै मूल्य निकाल्नुहोस् ।
4. दुई सङ्ख्याहरूमध्ये सानो चाहिँमा 7 जोड्दा ठूलोको दोब्बर हुन्छ । यदि ठूलो चाहिँमा 4 जोड्दा सानोको तेब्बर हुन्छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. 5 भेडा र 4 बाखाको को रु. 350000 पर्छ । यदि 3 भेडा र 2 बोकाको मूल्य रु. 195000 पर्छ भने प्रति भेडा र प्रति बाखाको मूल्य कति कति पर्ला ?
6. दुई सङ्ख्याहरूमध्ये पहिलो सङ्ख्यामा दोस्रो सङ्ख्याको पाँचगुणा जोड्यो भने 52 हुन्छ । यदि दोस्रो सङ्ख्यामा पहिलो सङ्ख्याको आठगुणा जोड्यो भने 65 हुन्छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
7. एउटा चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरूको योग 240^0 र फरक 56^0 भए ती कोणहरूको नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण : 2

अहिले बाबुको उमेर र छोरीको उमेरको योगफल 44 वर्ष छ । 8 वर्षपछि बुबाको उमेर छोरीको उमेरको दुई गुणा हुनेछ । उनीहरूको हालको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, बुबाको हालको उमेर x वर्ष र छोरीको हालको उमेर y वर्ष छ ।

प्रश्नअनुसार,

$x + y = 44$ .... (i)

8 वर्षपछि बुबाको उमेर $(x + 8)$ वर्ष र छोरीको उमेर $(y + 8)$ वर्ष हुन्छ । त्यसैले;

$(x + 8) = 2(y + 8)$

अथवा, $x = 2y + 16 - 8$

अथवा, $x = 2y + 8$ .... (ii)

x को मान समिकरण (i) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$2y + 8 + y = 44$

अथवा, $3y = 44 - 8$

अथवा, $3y = 36$

अथवा, $y = 12$

फेरि समिकरण (ii) बाट

$x = 2y + 8$

$= 2 \times 12 + 8$

$= 24 + 8$

$= 32$

$\therefore$ बुबाको उमेर 32 वर्ष र छोरीको उमेर 12 वर्ष छ ।

अभ्यास : 2

1. तीन वर्षअघि बुबा र छोराको उमेर योगफला 48 वर्ष थियो । तिन वर्षपछि बुबाको उमेर छोराको उमेरको तिन गुणा हुनेछ । बुबा र छोराको हालको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. दुईजना भाइ र बहिनीको उमेरको योगफल 54 वर्ष छ । यदि भाइ, बहिनीभन्दा 4 वर्ष जेठो भए तिनीहरूको हालको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. 15 वर्ष अघि बाबुको उमेर छोरीको भन्दा चारगुणा थियो अबको पाँच वर्षपछि बाबुको उमेर छोरीको भन्दा दुई गुणामात्र हुनेछ भने तिनीहरूको हालको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण : 3

दुई अङ्कले बनेको एउटा सङ्ख्या अङ्कहरूको योगफलको चार गुणा भन्दा 3 ले बढी छ । यदि उक्त सङ्ख्यामा 36 जोड्ने हो भने सङ्ख्यामा भएका अङ्कहरूको स्थान परिवर्तन हुन्छ । सो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ, 2 अङ्कको सङ्ख्या $10x + y$ छ ।

प्रश्नअनुसार, $10x + y = 4(x + y) + 3$

अथवा, $10x + y = 4x + 4y + 3$

अथवा, $10x - 4x = 4y + 3 - y$

अथवा, $6x = 3y + 3$

अथवा, $x = \frac{1}{6}(3y + 3)$

अथवा, $x = \frac{1}{2}(y + 1)$ .... (i)

फेरि, $10x + y + 36 = 10y + x$

अथवा, $10x - x = 10y - y - 36$

अथवा, $9x = 9y - 36$

अथवा, $x = \frac{1}{9}(9y - 36)$

अथवा, $x = y - 4$ .... (ii)

समीकरण (i) र (ii) बाट

$$\frac{1}{2}(y + 1) = y - 4$$

अथवा, $y + 1 = 2y - 8$

अथवा, $1 + 8 = 2y - y$

अथवा, $9 = y$

समिकरण (i) बाट

$$x = \frac{1}{2}(y + 1)$$

अथवा, $x = \frac{1}{2}(9 + 1)$

$$= \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

$\therefore$ इस्ट सङ्ख्या $10 \times 5 + 9$

$$= 59$$

अभ्यास : 3

1. दुई अङ्कको एउटा सङ्ख्यामा अङ्कहरूको योगफल 10 छ। यदि उक्त सङ्ख्यामा 36 जोड्यो भने अङ्कहरूको स्थान बदलिन्छ। उक्त सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।
2. दुई अङ्कको एउटा सङ्ख्याको अङ्कहरूको योग 8 छ। यदि सो सङ्ख्याबाट 36 घटायो भने त्यो सङ्ख्याको अङ्कहरूको स्थान बदलिन्छ भने त्यो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।
3. 10 र 100 को बिचमा पर्ने एउटा सङ्ख्याहरू अङ्कहरूको योगफल 7 छ। सङ्ख्याहरूको

स्थान बदल्दा आउने सङ्ख्या पहिलेको भन्दा 9 ले बढि हुन्छ । सो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण : 4

एउटा भिन्नको अंशलाई 2 ले गुणन गरी हरबाट 1 घटाउँदा भिन्नको मान 1 हुन्छ । अंशलाई 4 ले गुणन गरी हरबाट 1 घटाउँदा सो भिन्नको मात्र $\frac{3}{2}$ हुन्छ । सुरूको भिन्न कति हो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान,

मानौँ, सुरुको भिन्न $\frac{x}{y}$ छ ।

प्रश्नअनुसार, $2x = y - 1$

अथवा, $2x + 1 = y$ .... (i)

फेरि, $\frac{4x}{y+1} = \frac{3}{2}$

अथवा, $8x = 3y + 3$ .... (ii) [क्रस गुणा गर्दा]

समिकरण (i) बाट y को मान समिकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$8x = 3(2x + 1) - 3$

अथवा, $8x = 6x + 3 + 3$

अथवा, $2x = 6$

अथवा, $x = \frac{3}{2} = 3$

समिकरण (ii) बाट $y = 2x + 1$

$= 2 \times 3 + 1$

$= 7$

अभ्यास : 4

1. एउटा भिन्नको हरको मात्र अंशभन्दा 1 ले बढी छ । उक्त भिन्नको अंशलाई 2 ले गुणन गरी हरबाट 1 घटाउँदा भिन्नको मान 2 हुन्छ । सुरुको भिन्न कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. एउटा भिन्नको अंशमा 3 जोड्दा भिन्नको नयाँ मान 1 हुन्छ । सोही भिन्नको हरमा 3 जोड्दा भिन्नको मान $\frac{1}{4}$ हुन्छ । भिन्नको सुरुको मान कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।
3. एउटा भिन्नको हर र अंशको योगफल 7 छ । अंशमा 6 जोडेर हरबाट 1 घटाउँदा भिन्नको मान 3 हुन्छ । सुरुको भिन्न कति हो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. पृष्ठपोषण

(क) अभ्यासको 1 र 2 माथिको उदाहरण (i) को आधारमा गर्नुहोस् ।

(ख) अभ्यासको 3 र 4 माथिको उदाहरण (ii) को आधारमा गर्नुहोस् ।

(ग) अभ्यासको 5 माथिको उदाहरण (iii) को आधारमा गर्नुहोस् ।

(घ) अभ्यासको 6 सरल गरी माथिको उदाहरण (i) को आधारमा गर्नुहोस् ।

(ङ) अभ्यासको 7 सरल गरी माथिको उदाहरण (iii) को आधारमा गर्नुहोस् ।

(च) अभ्यासको 8 र 9 माथिको उदाहरण (v) को आधारमा गर्नुहोस् ।

(छ) अभ्यासको 10, 11 र 12 सरल गरी माथिको उदाहरण (iv) को आधारमा गर्नुहोस् ।

(ख) वर्गसमीकरणसँग सम्बन्धित शाब्दिक समस्याहरू

उदाहरण : 5

(क) एउटा धनात्मक सङ्ख्याको वर्गबाट 9 घटाउँदा 11 बाँकी रहन्छ भने सो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान, मानौं त्यो सङ्ख्या $= x$

प्रश्नअनुसार, $x^2 - 9 = 112$

अथवा, $x^2 - 9 - 112 = 0$

अथवा, $x^2 - 121 = 0$

अथवा, $(x - 11)(x + 11) = 0$

अब यदि $x - 11 = 0$ भए, $x = 11$

पुनः यदि $x + 11 = 0$ भए, $x = -11$

अतः आवश्यक सङ्ख्या $= 11$

(ख) दाजु र भाइको हालको उमेरको योगफल 34 वर्ष र उनीहरूको उमेरको गुणनफल 288 हुन्छ भने दाजु र भाइको हालको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

सर्वप्रथम यो शाब्दिक समस्यालाई गणितीय वाक्यमा बदल्नुपर्छ ।

दाजुको हालको उमेर $= x$ वर्ष मानौं ।

भाइको हालको उमेर $= y$ वर्ष मानौं ।

पहिलो सर्तअनुसार,

दुवैको उमेरको योगफल $= 34$ वर्ष

अथवा $x+y=34$..........................(i)

त्यस्तै, दुवैको उमेरको गुणनफल = 288 वर्ष

अथवा $x \times y = 288$

अथवा $x = \frac{288}{y}$ ....(ii)

स. (ii) बाट x को मान स. (i) मा प्रतिस्थापन गर्दा, $\frac{288}{y} + y = 34$

अथवा, $\frac{288+y^2}{y} = 34$ (बायाँ पक्षको सरल गर्दा)

अथवा, $288+y^2=34y$

अथवा, $y^2-34y+288=0$

अथवा, $y^2-(18+16)y+288=0$

अथवा, $y^2-18y-16y+288=0$

अथवा, $y(y-18)-16(y-18)=0$

अथवा, $(y-18)(y-16)=0$

यदि $y - 18 = 0$ भए $y = 18$ हुन्छ ।

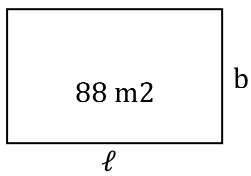
यदि $y - 16 = 0$ भए $y = 16$ हुन्छ ।

फेरि, स. (ii) बाट यदि $y = 18$ भए, $x = \frac{288}{18} = 16$ हुन्छ ।

यदि $y=16$ भए $x=\frac{288}{16}=18$ हुन्छ ।

दाजुको उमेर 16 र भाइको उमेर 18 वर्ष हुन सक्दैन । त्यसैले दाजुको उमेर 18 र भाइको उमेर 16 वर्ष हुनुपर्छ ।

(ग) एउटा आयताकार जग्गाको क्षेत्रफल $88m^2$ र परिमिति 38m भए सो जग्गाको लम्बाइ र चौडाइ निकाल्नुहोस् ।



दिइएको, जग्गाको क्षेत्रफल (A) = $88m^2$

जग्गाको परिमिति (P) = 38m

जग्गाको लम्बाइ (ℓ) = ?

जग्गाको चौडाइ (b) = ?

यहाँ, क्षेत्रफलको सुत्रअनुसार,

$A = \ell \times b$

अथवा $88 = \ell \times b$

अथवा $\frac{88}{b} = \ell \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

फेरि, परिमितिबाट,

$P = 2(\ell + b)$

अथवा, $38 = 2(\ell + b)$

अथवा, $19=\frac{88}{b}+b$ [ℓ को मान $\frac{88}{b}$ राख्दा)

अथवा, $19b = 88 + b^2$

अथवा, $b^2-19b+88=0$

अथवा, $b^2-(11+8)b+88=0$

अथवा, $b^2-11b-8b+88=0$

अथवा, $b(b-11)-8(b-11)=0$

अथवा, $(b-11)(b-8)=0$

यदि $b-11=0$ भयो भने $b=11$ हुन्छ ।

यदि $b-8=0$ भयो भने $b=8$ हुन्छ ।

स. (i) बाट यदि $b = 11$ भयो भने $l=\frac{88}{11}=8$ हुन्छ ।

यदि $b = 8$ भयो भने $l=\frac{88}{8}=11$ हुन्छ ।

यहाँ, b=11m र $\ell = 8$m हुन सक्दैन । किनकि ℓ, b भन्दा ठूलो हुन्छ । त्यसैले b = 8m र $\ell = 11$m हुनु पर्छ ।

(घ) अङ्कहरूको योगको चारगुणा भएको दुई अङ्कको एउटा सङ्ख्या छ । यदि अङ्कहरूको गुणनफल 18 भए त्यो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

यहाँ, दुई अङ्कको एउटा सङ्ख्या भनेको 10 देखि 99 सम्मको कुनै एउटा सङ्ख्या हुनुपर्छ । मानौँ 42 एउटा आवश्यक सङ्ख्या हो । 42 भनेको 4 दश र 2 एक हो । दशौ" स्थानको 4 लाई x र एक स्थानको 2 लाई y मान्दा 42 भनेको xy होइन ।

तसर्थ, $42 = 4 \times 10 + 2 \times 1$ हो ।

$= x \times 10 + y \times 1$

$= 10x + y$ हुन्छ । तर अङ्कहरू x र y हुन् ।

अत: अङ्कहरूको योगको चारगुणा = दुई अङ्कको एउटा सङ्ख्यालाई निम्नानुसार लेखिन्छ ।

$4(x+y)=10x+y$

अथवा,   4x+4y=10x+y

अथवा,   4x-10x=y-4y

अथवा,   -6x=-3y

$\therefore x = \frac{-3y}{-6} = \frac{y}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

दिइएको अर्को सर्तअनुसार, अङ्कहरूको गुणनफल $= 18$

त्यसैले $xy = 18$

स. (i) बाट, $\frac{y}{2} \times y = 18$ $- x = \frac{y}{2}$ राखेको)

अथवा, $y^2 = 36$

$\therefore y = \pm 6$

फेरि, स. (i) बाट $x = \frac{\pm 6}{2} = \pm 3$ हुन्छ ।

त्यसैले, त्यो सङ्ख्या, $10x + y = 10 \times (-3) + (-6) = -30 - 6 = -36$

वा $10x + y = 10 \times 3 + 6 = 30 + 6 = 36$ हुन्छ ।

तर त्यो सङ्ख्या (36 हुन सक्तैन् । किनकी $-3 \times 6 = -18$ हुन्छ । -3 र 6 को योगको चार गुणा -36 हुँदैन । त्यसैल आवश्यक सङ्ख्या 36 हुनुपर्छ ।

अभ्यास : 5

1. (क) $ax^2 + bx + c = 0$ वर्ग समिकरण हुन अनिवार्य सर्त लेख्नुहोस् ।
   (ख) $ax^2 + bx + c = 0$ पूर्ण वर्ग समिकरण हुने शर्तहरू लेख्नुहोस् ।
2. (क) कुनै धनात्मक सङ्ख्याको वर्गमा 1 जोड्दा योगफल 26 हुन्छ भने त्यो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (ख) एउटा पूर्णसङ्ख्याको वर्गलाई 18 बाट घटाउँदा 2 बाँकी रहन्छ भने सो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. एउटा आयताकार जग्गाको परिमिति 104m र क्षेत्रफल $660m^2$ भए लम्बाइ र चौडाइ निकाल्नुहोस् ।
4. वसन्तको 6 वर्ष अघि र 3 वर्षपछिको उमेरको गुणनफल 190 भए उसको हालको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. दुई अङ्कको एउटा सङ्ख्या त्यसका अङ्कहरूको योगको आठगुणा छ । यदि ती दुई अङ्कहरूको गुणनफल 14 भए त्यो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. अहिले बाबु र छोराको उमेर क्रमश: 37 र 8 वर्ष छ । कति वर्ष पहिले उनीहरूको उमेरको गुणनफल 96 थियो होला ?

7. एउटा आयताकार ठोसवस्तुको आयतन $1920cm^3$ छ । यदि यसको उचाइ 10cm र चौडाइ लम्बाइ भन्दा 4cm छोटो भए लम्बाइ र चौडाइ निकाल्नुहोस् ।

8. एउटा समकोण त्रिभुजको कर्णको लम्बाइ 13cm छ । बाँकी दुई भुजाहरू एकअर्को भन्दा 7cm फरक छन् भने बाँकी दुई भुजाहरू पत्ता लगाउनुहोस ।

9. दुई अङ्कको एउटा सङ्ख्या त्यसका अङ्कहरूको योगको 3 गुणा छ । यदि त्यसका अङ्कहरू गुणन गर्नेहो भने गुणन फल 14 हुन्छ भने त्यो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. लगातार आउने गन्तीका सङ्ख्याहरूमध्ये कुनै दुई विजोर सङ्ख्याहरूको गुणनफल 899 हुन्छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. **पृष्ठपोषण**

सबै अभ्यासका प्रश्नहरू उदाहरण अनुसार हल गर्नुहोस् ।

उत्तरहरू :

अभ्यास : 1

1. (क) 20, 15 (ख) 18, 19 (ग) 14

अभ्यास : 2

1. 42 वर्ष र 12 वर्ष 2. 27 वर्ष र 23 वर्ष 3. 55 वर्ष र 25 वर्ष

अभ्यास : 3

1. 37 2. 62 3. 34

अभ्यास : 4

१. $\frac{4}{5}$ २. $\frac{2}{5}$ ३. $\frac{3}{4}$

अभ्यास : 5

1. (क) $a \neq 0$ (ख) $a \neq 0, b^2 - 4ac = 0$

2. (क) 5 (ख) 4

अभ्यास : 6

1. 30m, 22 m 2. 16 वर्ष 3. 72 4. 5 वर्ष

5. 16cm, 12cm 6. 12cm, 5cm 7. 27 8. 29 र 31

7. **सारांश :**

शाब्दिक समस्याहरूका अज्ञात राशीलाई चर मानी गणितीय वाक्य र समिकरण बनाई हल गर्न सकिन्छ । परीक्षामा सोधिएका पुराना प्रश्नहरू सङ्कलन गरी हल गर्नुहोस् ।

एकाइ : 13

त्रिभूज र चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of Triangle and Quadrilateral)

1. **परिचयः**

यस एकाईमा एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरु बीच बनेका समानान्तर चतुर्भुजहरु, समानान्तर चतुर्भुजहरु र त्रिभुज तथा त्रिभुजहरुको क्षेत्रफल बीच हुने सम्बन्धमा चर्चा गरिएको छ ।

2. **सिकाई उपलब्धि :**

यस एकाईको अध्ययन पछि निम्नलिखित सिकाई उपलब्धि हासिल हुने छ :

"त्रिभुज र चतुर्भुजका क्षेत्रफल सम्बन्धी गुणहरू प्रमाणित/पुष्टि गर्न"

3. **आधारभूत विषय वस्तुः**

त्रिभुज र चतुर्भुजको क्षेत्रफल अन्तर्गत निम्न अनुसारका आधारभूत कुराहरुको भूमिका महत्वपूर्ण रहेको हुन्छ ।

- समानान्तर चतुर्भुजलाई प्रत्येक विकर्णले बराबर दुई भागमा विभाजन गर्छ ।
- समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल = आधार × उचाइ हुन्छ ।
- त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार × उचाइ हुन्छ ।
- त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ हुन्छ ।

  [s = त्रिभुजको अर्धपरिमिति, a, b र c त्रिभुजका भुजाहरु]
- पाइथागोरसको सूत्र, $h^2 = p^2 + b^2$

  [जस्मा h = समकोणी त्रिभुजको कर्ण, p = लम्ब र b = आधार]
- त्रिभुजहरु अनुरुप गर्ने तथ्यहरु : को.भु.को., को.को.भु., भु.को.भु., स.क.भु. र भु.भु.भु.
- वर्गको क्षेत्रफल $= \ell^2$ [$\because \ell$ = भुजाको लम्बाइ]
- वर्गको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}d^2$ [$\because d$ = विकर्णको लम्बाइ]
- समवाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ [$\because d_1$ = पहिलो विकर्ण र d_2 = दोस्रो विकर्ण]
- आयतको क्षेत्रफल $= \ell \times b$ [$\because \ell$ = लम्बाइ र b = चौडाइ]
- समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times h \times (\ell_1 + \ell_2)$

  [$\because h$ = उचाइ, ℓ_1 = पहिलो समानान्तर भुजाको लम्बाइ र ℓ_2 = दोस्रो समानान्तर भुजाको लम्बाइ]

- चतुर्भुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times d \times (P_1 + P_2)$ [$\because$ d = विकर्ण, P_1 = विकर्णमा खिचिएको पहिलो लम्ब र P_2 = विकर्णमा खिचिएको दोस्रो लम्ब]
- समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरु एक आपसमा समद्विभाजन हुन्छन् ।
- त्रिभुजको मध्यिकाले उक्त त्रिभुजलाई बराबर २ भागमा विभाजन गर्छ ।

4. **मूख्य विषय वस्तुः**

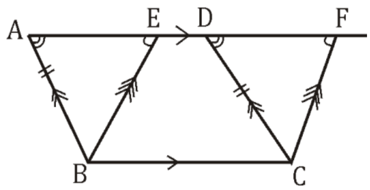
(**क**) **साध्य**

साध्य 1 :

एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरु बीचमा रहेका समानान्तर चतुर्भुजहरुको क्षेत्रफल बराबर हुन्छन् ।

थाहा दिएको :

एउटै आधार BC र उही समानान्तर रेखाहरु BC//AF बिच ▱ABCD र ▱EBCF छन् ।



सिद्ध गर्नुपर्ने : ▱ABCD को क्षेत्रफल = ▱EBCF को क्षेत्रफल

प्रमाण

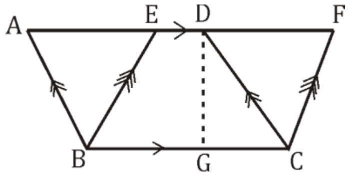
	तथ्यहरू		कारणहरू
1.	<u>ΔABE र ΔDCF मा</u>	1.	
i.	AB = CD (भु.)	i.	समानान्तर चतुर्भुज ABCD का सम्मुख भुजाहरू
ii.	$\angle$BAF = $\angle$CDF (को)	ii.	सङ्गत कोण (AB//CD)
iii.	$\angle$AEB = $\angle$DFC (को)	iii.	सङ्गत कोण (BE//CF)
2.	ΔABE $\cong$ ΔDCF	2.	भु.को.को. तथ्य अनुसार
3.	ΔABE = ΔDCF	3.	अनुरूप त्रिभुजको क्षेत्रफल बराबर हुने भएकोले
4.	ΔABE + स.ल.च. EBCD = $\angle$DCF + स.ल.च. EBCD	4.	योग तथ्य (दुवै तर्फ एउटै स.ल.च. EBCD जोडेकों)
5.	$\therefore$ ▱ABCD को क्षेत्रफल = ▱EBCF को क्षेत्रफल	5.	सिङ्गो टुक्रे तथ्य

प्रमाणित भयो ।

अर्को तरिका :

थाहा दिएको :

एउटै आधार BC र उही समानान्तर रेखाहरु AF र BC बिच ▱ABCD र ▱EBCF छन् ।



सिद्ध गर्नुपर्ने : ▱ABCD को क्षेत्रफल = ▱EBCF को क्षेत्रफल

जुक्ति : DG $\perp$ BC खिचौं (BC मा DG लम्ब खिचौं)।

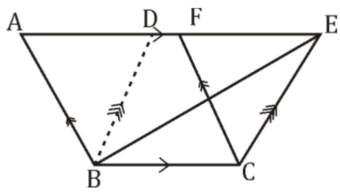
प्रमाण

	तथ्यहरू		**कारणहरू**
1.	▱ABCD को क्षेत्रफल = BC $\times$ DG	1.	समानान्तर चतुर्भुजका क्षेत्रफल = आधार $\times$ उचाई
2.	▱EBCF को क्षेत्रफल = BC $\times$ DG	2.	कारण नं. (1) जस्तै
3.	▱ABCD को क्षेत्रफल = ▱EBCF को क्षेत्रफल	3.	तथ्य नं. (1) र (2) बाट

प्रमाणित भयो ।

साध्य : 2

एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरू बिचमा रहेका समानान्तर चतुर्भुज र त्रिभुजमध्ये त्रिभुजको क्षेत्रफल समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफलको आधा हुन्छ ।



थाहा दिएको :

एउटै आधार BC र उही समानान्तर रेखाहरु AE र BC बिच ▱ABCD र ΔEBC छन् ।

सिद्ध गर्नुपर्ने : ▱EBC को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$▱ABCD को क्षेत्रफल

जुक्ति : CE सँग समानान्तर हुने गरी विन्दु B बाट BF खिचौं ।

प्रमाण

	तथ्यहरू		**कारणहरू**
1.	▱ABCD को क्षेत्रफल = ▱FBCE को क्षेत्रफल	1.	एउटै आधार BC र उही समानान्तर रेखाहरू AE र BC बिच बनेका समानान्तर चतुर्भुजहरू हुनाले

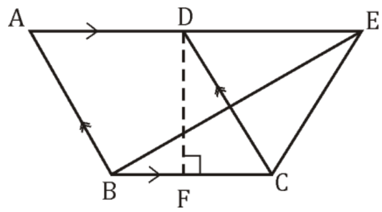
2.	▱EBC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$▱FBCE को क्षेत्रफल	2.	स.च. FBCE को विकर्ण BF ले स.च. लाई आधा पार्ने हुनाले ।
3.	▱EBC को क्षेत्रफल = ▱ABCD को क्षेत्रफल	3.	तथ्य नं. (1) र (2) बाट

प्रमाणित भयो ।

अर्को तरिका

थाहा दिएको :

एउटै आधार BC र उही समानान्तर रेखाहरु बिच ▱ABCD र ΔEBC छन् ।



सिद्ध गर्नुपर्ने : ▱EBC को क्षेत्रफल$=\frac{1}{2}$▱ABCD को क्षेत्रफल

जुक्ति : $DF \perp BC$ खिचौँ (BC मा DF लम्ब खिचौँ ।)

प्रमाण:

	तथ्यहरू		**कारणहरू**
1.	▱ABCD को क्षेत्रफल $= BC \times DF$	1.	समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल = आधार × उचाई हुने भएकोले
2.	ΔEBC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times BC \times DF$	2.	त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार × उचाई हुने हुनाले
3.	ΔEBC को क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}$▱ABCD को क्षेत्रफल	3.	तथ्य नं. (1) र (2) बाट

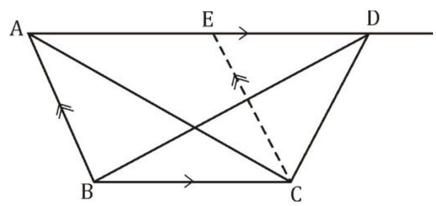
प्रमाणित भयो ।

साध्य : 3

एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरू बिच रहेका त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल बराबर हुन्छन् ।

थाहा दिएको :

एउटै आधार BC र उही समानान्तर रेखाहरु AD र BC बिच ΔABC र ΔDBC छन् ।



सिद्ध गर्नुपर्ने : ΔABC को क्षेत्रफल = ΔDBC को क्षेत्रफल

जुक्ति : BA सँग समानान्तर हुने गरी विन्दु C बाट CE खिचौँ ।

प्रमाण

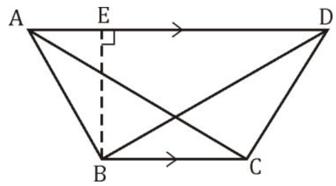
	तथ्यहरू		कारणहरू
1.	ΔABC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ ▱EABC को क्षेत्रफल	1.	स.च. EABC को विकर्ण AC हुनाले ।
2.	ΔDBC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ ▱EBCE को क्षेत्रफल	2.	एउटै आधार BC र उही समानान्तर रेखाहरू AD र BC बिच रहेको त्रिभुज र स.च. हुनाले
3.	ΔEBC को क्षेत्रफल = ΔDBC को क्षेत्रफल	3.	तथ्य नं. (1) र (2) बाट

प्रमाणित भयो ।

अर्को तरिका

थाहा दिएको :

एउटै आधार BC र उही समानान्तर रेखाहरु AD र BC बिच ΔABC र ΔDBC छन् ।



सिद्ध गर्नुपर्ने : ΔABC को क्षेत्रफल = ΔDBC को क्षेत्रफल

जुक्ति : BE $\perp$ AD खिचौँ (AD मा BE लम्ब खिचौँ) ।

प्रमाण :

	तथ्यहरू		कारणहरू
1.	ΔABC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times BC \times BE$	1.	त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ उचाइ हुनाले
2.	ΔDBC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times BC \times BE$	2.	कारण नं. (1) जस्तै
3.	ΔABC को क्षेत्रफल = ΔDBC को क्षेत्रफल	3.	तथ्य नं. (1) र (2) बाट

प्रमाणित भयो ।

(ख) **धेरै छोटो उत्तर आउने प्रश्नहरू**

उदाहरण : 1

समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल निकाल्ने सुत्र लेख्नुहोस् ।

समाधान :

समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल = आधार $\times$ उचाई

5. अभ्यास :

5.1 धेरै छोटो उत्तर आउने प्रश्नहरू

1. (क) चतुर्भुजको क्षेत्रफल निकाल्ने सुत्र लेख्नुहोस् ।

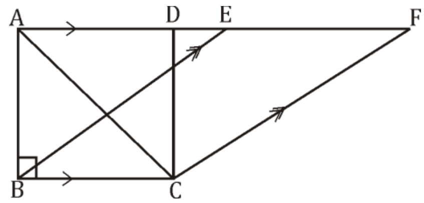
   (ख) कुनै समलम्ब चतुर्भुजको समानान्तर भुजाहरूको लम्बाई क्रमशः a र b छन् । उचाई x भए सो स.ल.च. को क्षेत्रफल कति हुन्छ ?

   (ग) एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरू बिचमा रहेको त्रिभुजहरूको सम्बन्ध कस्तो हुन्छ ?

5.2 छोटो उत्तर आउने प्रश्न

उदाहरण 1 :

दिइएको चित्रमा ABCD आयत र EBCF समानान्तर चतुर्भुज हुन् । यदि AC = 10 से.मी. र BC . 8 से.मी. भए समानान्तर चतुर्भुज EBCF को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान :

यहाँ, AC = 10 से.मी. BC = 8 से.मी.

$\therefore$ AB $= \sqrt{(AC)^2 - (BC)^2}$ [$\therefore$ पाइथागोरसको सुत्रबाट]

$= \sqrt{100 - 64}$

$= \sqrt{36}$

= 6 से.मी.

अब, ABCD आयतको क्षेत्रफल $= AB \times BC = (6 \times 8)$ वर्ग से.मी.

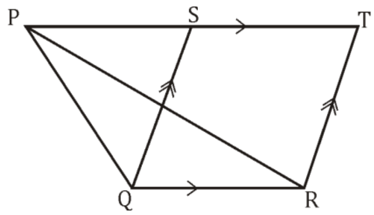
= 48 वर्ग से.मी.

$\therefore$ स.च. EBCF को क्षेत्रफल = आयत ABCD को क्षेत्रफल

{एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरू बिच बनेका आयत र समानान्चर चतुर्भुजको क्षेत्रफलल बराबर हुन्छ ।}

उदाहरण : 2

दिइएको चित्रमा, $\triangle$PQR र ▱SQRT एउटै आधार QR र उही समानान्तर रेखाहरू QR र PT बिच बनेका छन् । यदि PQ = 5 से.मी., QR = 6 से.मी. र PR = 7 से.मी. भए स.च. SQRT को क्षेत्रफल कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान :

यहाँ, ΔPQR को क्षेत्रफल निकाल्दा,

अर्ध परिमिति (S) $= \frac{5 + 6 + 7}{2} = \frac{18}{2} = 9$ से.मी.

ΔPQR को क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$

$= \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2}$

$= \sqrt{216}$

$= 6\sqrt{6}$ वर्ग से.मी.

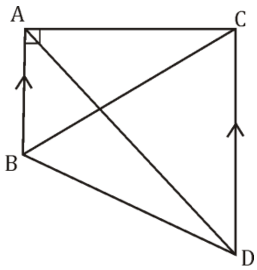
अब, स.च. SQRT को क्षेत्रफल $= 2 \times \Delta PQR$ को क्षेत्रफल

$= 2 \times 6\sqrt{6}$ वर्ग से.मी.

$= 12\sqrt{6}$ वर्ग से.मी.

उदाहरण : 3

सँगैको चित्रमा $AB||CD$, $CA \perp AB$ छन् । यदि $AC = 12$ से.मी., $BC = 13$ से.मी. भए ΔABD को क्षेत्रफल कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



यहाँ, समकोण त्रिभुज BAC मा

AC $= 12$ से.मी., र $BC = 13$ से.मी.

AB $= \sqrt{(BC)^2 - (AC)^2}$ [$\because$ पाइथागोरसको सुत्र अनुसार]

$= \sqrt{(13)^2 - (12)^2}$

$= \sqrt{169 - 144}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$ से.मी.

अब, ΔABC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AB \times AC$

$= \frac{1}{2} \times 5 \times 12$ वर्ग से.मी.

$= \frac{60}{2}$ वर्ग से.मी.

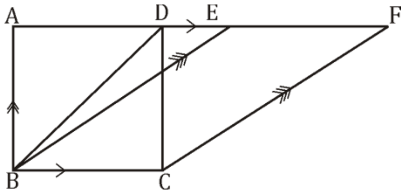
$= 30$ वर्ग से.मी.

$\therefore \Delta ABD$ को क्षेत्रफल $= \Delta ABC$ को क्षेत्रफल $\left\{ \begin{array}{l} \therefore \text{ एउटै आधार र उही समानान्तर} \\ \text{रेखाहरू AB र CD बिच रहेकोले} \end{array} \right\}$

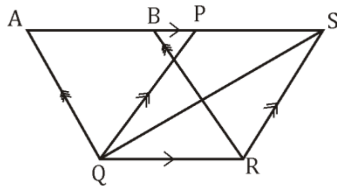
$= 30$ वर्ग से.मी.

अभ्यास 5.3. (**छोटो उत्तर आउने प्रश्नहरू**)

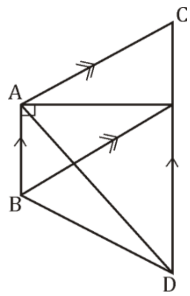
(क) सँगैको चित्रमा, ABCD वर्ग र EBCF समानान्तर चतुर्भुज छन् जुन एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरू बिच रहेका छन् । यदि विकर्ण $BD = 6\sqrt{2}$ से.मी. भए स.च. EBCF को क्षेत्रफल कति होला ?



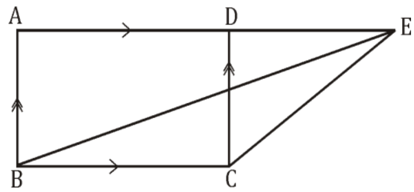
(ख) सँगैको चित्रमा, PQRS समवाहु चतुर्भुज छन् । यदि $PS = 6$ से.मी. र $QS = 8$ से.मी. भए स.च. AQRB को क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।



(ग) दिइएको चित्रमा AB||CD, EA⊥AB, AC||BE छन् । यदि $AC = 25$ से.मी. र $AE = 24$ से.मी. भए ΔABC को क्षेत्रफल कति होला ?



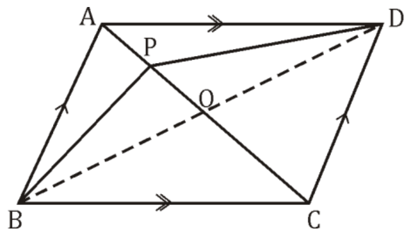
(घ) दिइएको चित्रमा ABCD आयत र ΔABC एउटै आधार BC र उही समानान्तर रेखाहरू बिच रहेका छन् । यदि $2AB = BC = 14$ से.मी. भए ΔEBC को क्षेत्रफल कति होला ?



अभ्यास 5.4. **लामो उत्तर आउने प्रश्नहरू**

उदाहरण :1

दिइएको चित्रमा ABCD एउटा स.च. हो । विकर्ण AC मा कुनै विन्दु P छ । सिद्ध गर्नुहोस् : ΔABP को क्षेत्रफल ΔADP को क्षेत्रफल सँग बराबर हुन्छ ।



समाधान :

थाहा दिएको : ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।

विकर्ण AC मा कुनै विन्दु P छ ।

सिद्ध गर्नुपर्ने : ΔABP को क्षेत्रफल $= \Delta ADP$ को क्षेत्रफल

जुक्ति : B र D जोडौँ, जुन विकर्णहरू विन्दु O मा प्रतिच्छेदन हुन्छन् ।

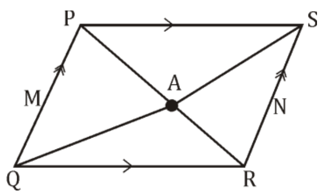
प्रमाण :

	तथ्यहरू		**कारणहरू**
1.	BO = DO	1.	स.च.का विकर्णहरू आपसमा समद्विभाजन हुने हुनाले
2.	ΔABD मा, $\Delta ABO = \Delta ADO$	2.	AO मध्यिका हुनाले (मध्यिकाले त्रिभुजलाई बराबर क्षेत्रफलमा विभाजन गर्दछ ।)
3.	ΔPBD मा, $\Delta PBO = \Delta PDO$	3.	PO मध्यिका हुनाले (2 को जस्तै कारण)
4.	$\Delta ABO - \Delta PBO = \Delta ADO - \Delta PDO$	4.	तथ्य (2) र (3) बाट
5.	ΔABP को क्षेत्रफल $= \Delta ADP$ को क्षेत्रफल	5.	शेष तथ्य

प्रमाणित भयो ।

उदाहरण : 2

दिइएको चित्रमा PQRS समानान्तर चतुर्भुज हो । स.च. अन्तर्गत कुनै एउटा विन्दु A छ जससँग P, Q, R र S क्रमशः जोडिएको छ । सिद्ध गर्नुहोस् : $(\Delta PAS + \Delta QAR)$ को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \square PQRS$ को क्षेत्रफल ।



समाधान :

थाहा दिएको : (i) PQRS एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।

(ii) समानान्तर चतुर्भुज PQRS अन्तर्गत कुनै विन्दु A जससँग P, Q, R, र S जोडिएका छन् ।

सिद्ध गर्नुपर्ने : $(\Delta PAS + \Delta QAR)$ को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$PQRS को क्षेत्रफल ।

जुक्ति : विन्दु A बाट जाने गरी PS सँग समानान्तर रेखा MN खिचौँ ।

प्रमाण :

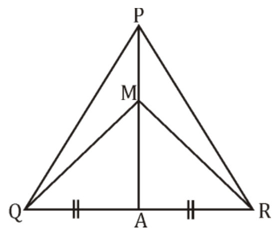
	तथ्याहरू		**कारणहरू**
1.	PMNS स.च. हो ।	1.	सम्मुख भुजाहरू समानान्तर हुनाले ।

2.	$\Delta PAS = \frac{1}{2}$◷▱PMNS	2.	एउटै आधार PS र उही समानान्तर रेखाहरू PS//MN बिच बनेका त्रिभुज र स.च. हुनाले ।
3.	MQRN स.च. हो ।	3.	सम्मुख भुजाहरू समानान्तर हुनाले ।
4.	$\Delta QAR = \frac{1}{2}$▱MQRN	4.	एउटै आधार QR र उही समानान्तर रेखाहरू बिचका त्रिभुज र स.च. हुनाले ।
5.	$\Delta PAS + \Delta QAR = \frac{1}{2}$▱PMNS+$\frac{1}{2}$▱MQRN	5.	तथ्य नं. (2) र (4) बाट
6.	$\Delta PAS + \Delta QAR = \frac{1}{2}$(▱PMNS+▱MQRN) $=\frac{1}{2}$▱PQRS को क्षेत्रफल	6.	तथ्य नं. (5) बाट

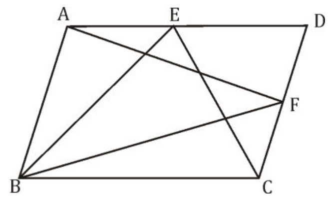
प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 5.5. (**लामो उत्तर आउने प्रश्नहरू**)

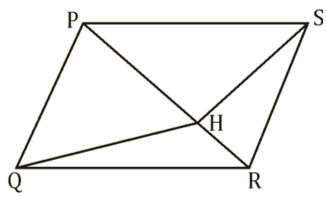
(क) दिइएको चित्रमा, PA त्रिभुज PQR को मध्यिका हो । PA मा रहेको कुनै विन्दु M सँग Q र R जोडिएका छन् । सिद्ध गर्नुहोस् :-ΔPQM को क्षेत्रफल = ΔPRM को क्षेत्रफल ।



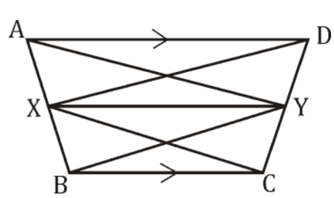
(ख) दिइएको चित्रमा, ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो । AD र CD मा रहेका E र F विन्दुहरूसँग क्रमशः B र C तथा A र B जोडिएका छन् । सिद्ध गर्नुपर्ने : ΔABF को क्षेत्रफल = ΔBCE को क्षेत्रफल ।



(ग) सँगैको चित्रमा PQRS एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो । विकर्ण PR मा रहेको कुनै विन्दु H सँग Q र S जोडिएका छन् । सिद्ध गर्नुपर्ने : ΔQHR को क्षेत्रफल = ΔSHR को क्षेत्रफल ।

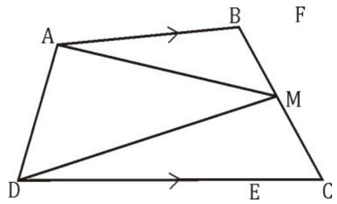


(घ) चित्रमा एउटा ABCD समलम्ब चतुर्भुज हो जसमा AD//BC छ । XY मध्यरेखा हो भने ΔABY को क्षेत्रफल = ΔCDY को (क्षेत्रफल) हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



(ङ) **लामो उत्तर आउने प्रश्नहरू (उच्च दक्षता)**

उदाहरण : 1



सँगैको चित्रमा ABCD एउटा समलम्ब चतुर्भुज हो । जसमा AB// DC छ । BC को मध्ये विन्दु M भए ΔADM को क्षेत्रफल, स.ल.च. ABCD को क्षेत्रफलको आधा हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान :

थाहा दिएको : समलम्ब चतुर्भुज ABCD मा, BC को मध्य विन्दु M हो ।

सिद्ध गर्नुपर्ने : ΔAMD को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ स.ल.च. ABCD को क्षेत्रफल ।

जुक्ति : AD सँग समानान्तर हुने र विन्दु M बाट जाने गरी एउटा रेखा खिचौँ । DC रेखामा काटिएको विन्दुलाई E र AB लाई बढाउँदा काटिएको विन्दुलाई F नाम दिऔँ ।

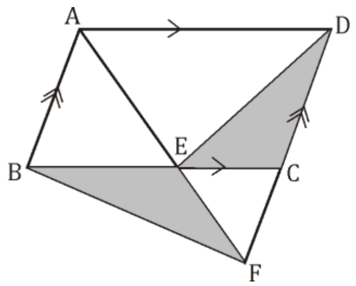
प्रमाण :

	तथ्यहरू		**कारणहरू**
1.	ΔMEC र ΔMFB मा	1.	
(i).	MC = BM (भु.)	(i)	BC को मध्यविन्दु M हुनाले (थाहा दिएकोबाट)
(ii)	$\angle$MEC = $\angle$MFB (को)	(ii)	एकान्तर कोण (AF//DC)
(iii)	$\angle$MCE = $\angle$MBF (को)	(iii)	कारण नं. 1(ii) जस्तै
2.	ΔMEC $\cong$ ΔMFB	2.	भु.को.को. तथ्य बाट
3.	ΔMEC = ΔMFB	3.	अनुरूप त्रिभुजको क्षेत्रफल बराबर हुनाले
4.	ΔMEC + बहुभुज ADEMB = ΔMFB + बहुभुज ADEMB	4.	बराबरी योगतथ्य (दुवैतर्फ तथ्य नं. 3 मा एउटै बहुभुज जोडेको)
5.	स.ल.च. ABCD = स.च. ADEF	5.	सिङ्गो टुक्रे तथ्य
6.	ΔAMD को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च.ADEF को क्षेत्रफल	6.	एउटै आधार AD र AD//EF बिच बनेका त्रिभुज र स.च. भएकोले
7.	ΔAMD को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.ल.च. ABCD को क्षेत्रफल	7.	तथ्य नं. (5) र (6) बाट ।

प्रमाणित भयो ।

उदाहरण : 2

सँगैको चित्रमा एउटा ABCD स.च. हो । AE र DE लम्ब्याएर F सँग जोडिएको छ । B र F समेत जोडिएको छ । सिद्ध गर्नुपर्ने : ΔDEC को क्षेत्रफल = ΔBEF को क्षेत्रफल ।



समाधान :

थाहा दिएको : (i) ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।

(ii) AE र DC लम्ब्याएर F सँग जोडिएका छन् ।

सिद्ध गर्नुपर्ने : ΔDEC को क्षेत्रफल = ΔBEF को क्षेत्रफल ।

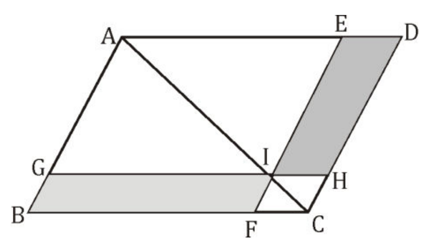
प्रमाण :

	तथ्यहरू		**कारणहरू**
1.	$\Delta ADE = \frac{1}{2} \square ABCD$	1.	एउटै आधार AD र उही समानान्तर रेखाहरू AD र BC बिच बनेका हुनाले
2.	$\Delta ABE + \Delta DEC = \frac{1}{2} \square ABCD$	2.	स.च.को बाँकी भाग हुनाले (तथ्य 1 बाट)
3.	$\Delta ABF = \frac{1}{2} \square ABCD$	3.	एउटै आधार AB र उही समानान्तर रेखाहरू AB र DF बिच रहेका हुनाले
4.	$\Delta ABE + \Delta DEC = \Delta ABF$	4.	तथ्य नं. (2) र (3) बाट
5.	$\Delta ABF = \Delta ABE + \Delta BEF$	5.	सिङ्गो टुक्रे तथ्य
6.	$\Delta DEC = \Delta BEF$	6.	तथ्य (4) र (5) बाट

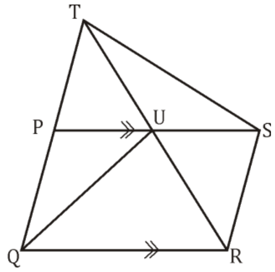
प्रमाणित भयो ।

5.4. लामो उत्तर आउने प्रश्न

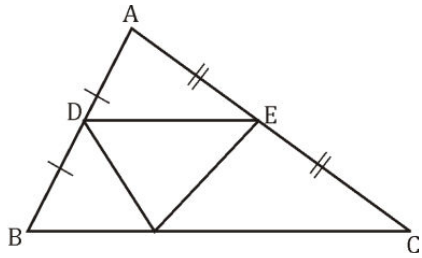
(क) दिइएको चित्रमा ABCD स.च. हो । AC विकर्ण GH//BC र EF//DC छन् । सिद्ध गर्नुहोस् : $\square$EIHD = $\square$GBFI (क्षेत्रफलमा)



(ख) सँगैको चित्रमा PQRS समानान्तर चतुर्भुज हो । QP र RU लम्ब्याएर T सँग जोडिएको छ । सिद्ध गर्नुहोस् : ΔTQU को क्षेत्रफल $=$ ΔTPS को क्षेत्रफल ।



(ग) ΔABC मा D र E क्रमशः AB र AC का मध्यविन्दुहरू हुन् र F भुजा BC को कुनै विन्दु हो भने सिद्ध गर्नुहोस् : ΔDEF को क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}$ ΔABC को क्षेत्रफल ।



6. पृष्ठपोषण :

6.1. अति छोटो प्रश्नहरू

(क) चतुर्भुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्ण $\times$ (त्रिभुजमा खिचेका लम्बहरूको योगफल)

(ख) समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ उचाइ $\times$ (समानान्तर भुजाहरूको योगफल)

(ग) एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरू बिचमा रहेका त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।

6.2. छोटो प्रश्नहरू

(क) वर्गको विकर्ण दिएको अवस्थामा वर्गको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$(विकर्ण)^2 प्रयोग गरी वर्ग ABCD को क्षेत्रफल निकाल्ने । वर्ग र स.च. एउटै आधारमा र उही समानान्तर रेखाहरू बिच रहेकोले स.च.को क्षेत्रफल र वर्गको क्षेत्रफल एउटै हुन्छ । [उत्तरः 36 वर्ग से.मी.]

(ख) समवाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल $= (\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2)$ जस्मा d_1 पहिलो विकर्ण र d_2 दोस्रो विकर्ण हुन्छ । [उत्तरः 24 वर्ग से.मी.]

(ग) AC = BE = 25 से.मी. (स.च.को सम्मुख भुजा हुनाले) पाइथागोरस साध्य अनुसार AD पत्ता लगाई समकोण त्रिभुज ABE को क्षेत्रफल निकाल्ने । ΔABE र ΔABD एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिच रहेकोले दुवैको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।
[49 वर्ग से.मी.]

(घ) सुरूमा दिइएको सम्बन्ध र नापका आधारमा आयत ABCD को क्षेत्रफल निकाल्ने । आयत र ΔEBC एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिच रहेकोले त्रिभुजको क्षेत्रफल आयतको क्षेत्रफलको आधा हुन्छ । [49 वर्ग से.मी.]

6.3. **लामो उत्तर आउने प्रश्नहरू**

(क) ΔPQR मा मध्यिका PA हुनाले $\Delta PQA = \Delta PRA$ हुन्छ । त्यसरी नै ΔMQR मा MA मध्यिका हुनाले $\Delta MQA = \Delta MRA$ हुन्छ । अगाडिको क्षेत्रफलबाट पछाडिको क्षेत्रफल घटाउँदा नतिजा प्राप्त हुन्छ ।

(ख) स.च. ABCD मा ΔNCE र स.च. ABCD को आधार BC र उही समानान्तर रेखाहरू बिचको सम्बन्ध प्रयोग गर्ने । त्यसरी नै ΔABF र स.च. ABCD को एउटा आधार AB र उही समानान्तर रेखाहरू बिचको सम्बन्ध प्रयोग गरी $\Delta BCE = \Delta ABF$ देखाउन सकिन्छ ।

(ग) यसै पाठको उदाहरण 1 जस्तै विकर्ण QS जोडेर समाधान गर्नुहोस् ।

(घ) एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरू बिच रहेका त्रिभुजहरूको क्षेत्रफलहरू बराबर हुन्छन् भन्ने सिद्धान्त अनुसार $\Delta AXY = \Delta DXY$ र $\Delta BXY = \Delta CXY$ देखाइ क्रमशः जोड्दा $\Delta ABY = \Delta CDX$ देखाउन सकिन्छ ।

6.4. **अति लामो उत्तर आउने प्रश्नहरू**

(क) समानान्तर चतुर्भुजको विकर्णले समानान्तर चतुर्भुजलाई बराबर क्षेत्रफलमा विभाजन गर्छ भन्ने अवधारणालाई लिई, $\Delta ABC = \Delta ADC$, $\Delta AGI = \Delta AEI$ र $\Delta EIC = \Delta HIC$ देखाइ बराबरबाट बराबर परिमाण घटाउँदा बन्ने परिमाण पनि बराबर हुन्छ भनी सकिन्छ ।

(ख) यसैं पाठको उदाहरण 2 जस्तै गरी आएको नतिजा $\Delta PQU = \Delta TUS$ को क्षेत्रफलमा बराबरी योग तथ्य अपनाई दुवै तर्फ साझा ΔTPU को क्षेत्रफल जोडेर ΔTQU को क्षेत्रफल $= \Delta TPS$ को क्षेत्रफल देखाउन सकिन्छ ।

(ग) ΔABC मा BC को मध्य विन्दुमा D र E लाई जोडि बन्ने त्रिभुज, ΔABC को एक चौथाइ हुन्छ भन्ने तथ्य अपनाउने । उक्त मध्यविन्दु जोड्दा बन्ने त्रिभुज र ΔDEF एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरू बिच बनेका हुनाले क्षेत्रफल बराबर हुन्छ भन्ने सिद्धान्त प्रयोग गरी समाधान गर्न सकिन्छ ।

७. **सारांश :**

यस पाठको अध्ययन पछि निम्न निश्कर्षमा पुग्न सकिन्छ ।

1. एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरू बिच बनेका,
   (क) समानान्तर चतुर्भुजहरूका क्षेत्रफल बराबर हुन्छन् ।
   (ख) स.च. र त्रिभुजमा, त्रिभुजको क्षेत्रफल स.च. को क्षेत्रफलको आधा हुन्छ ।
   (ग) त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।

पाठ : 14

रचना (Construction)

1. **परिचय :**

यस एकाइलाई (i) सुरूमा दिइएको नापअनुसार त्रिभुजको रचना गरी उक्त त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने आयत वा समानान्तर चतुर्भुजको रचना (ii) सुरूमा आयत, स.च. वा चतुर्भुजको रचना गरी उक्त ज्यामितीय चित्रहरूको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने गरी त्रिभुज वा सोही तर फरक नाप भएका ज्यामितीय चित्रहरू (त्रिभुज, आयत, स.च. वा चतुर्भुज) रचना गर्ने समस्याहरूमा केन्द्रित गरिएको छ ।

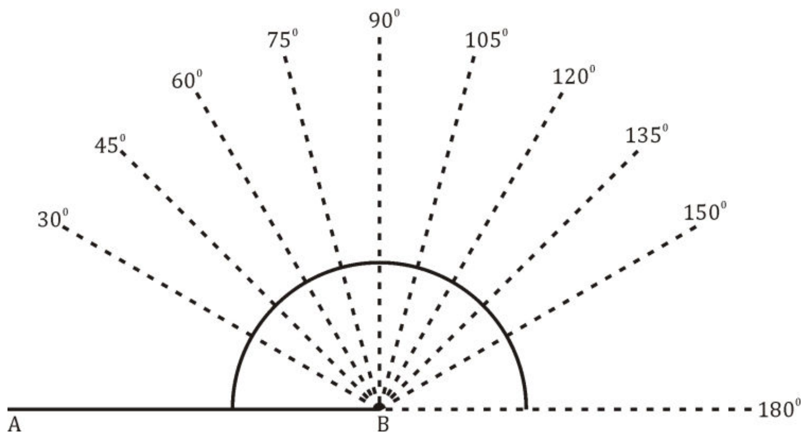
2. **सिकाई उपलब्धि :**

यस एकाइको अध्ययनपछि निम्नलिखित सिकाइ उपलब्धि हासिल हुनेछ :

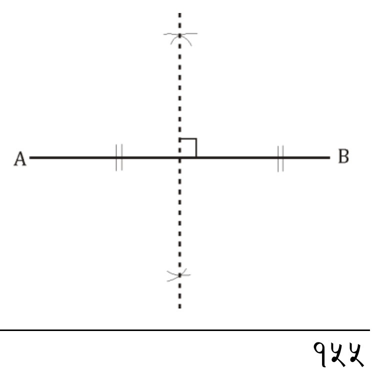
- बराबर क्षेत्रफल हुने चर्तुभुज र त्रिभूजहरूको रचना तथा तिनीहरू बिच अन्तरसम्बन्ध देखाउन ।

3. **आधारभूत विषय वस्तू :**

(क) कम्पासको सहायताले कोणहरू खिच्ने तरिका,



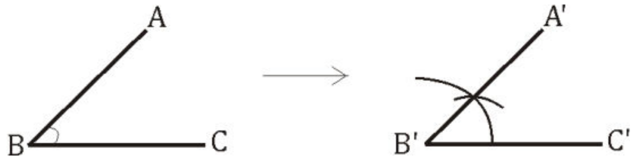
(ख) पहिलो भुजा (आधार भुजा) खिच्दा, कोण खिच्न मिल्ने वा विकर्ण खिच्न मिल्ने चयन गर्नुपर्छ ।



(ग) कुनै पनि रेखा खण्डको लम्बार्धक खिच्दा छेउ छेउ विन्दुबाट आधाभन्दा बढी चाप लिएर रेखाखण्डको दुईतिर काट्नु पर्दछ ।

(घ) एउटा कोणलाई कुनै अर्को विन्दुमा सार्न पहिलो

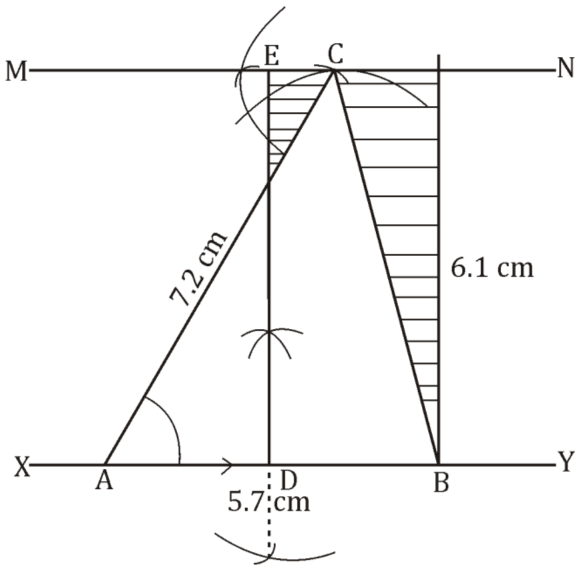
कोणको नापको आधारमा अर्को विन्दुमा चाप अनुसार बनाउनु पर्दछ ।



4. **मुख्य विषय वस्तु**

उदाहरण : 1

AB = 5.7 से.मी., BC = 6.1 से.मी. र AC = 7.2 से.मी. नाप भएको त्रिभुजको रचना गरी उक्त त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने गरी एउटा आयतको रचना गर्नुहोस् ।



समाधान :

दिइएको : AB = 5.7 से.मी.

BC = 6.1 से.मी.

AC = 7.2 से.मी.

रचना गर्नुपर्ने : ΔABC को क्षेत्रफलसँग बराबर हुनेगरी एउटा आयत ।

∴ आवश्यक ΔABC को क्षेत्रफल

= आयत BDEF को क्षेत्रफल तयार भयो ।

रचना गर्ने विधि :

(i) आधार रेखा XY मा AB = 5.7 cm को रेखाखण्ड खिच्नुहोस् ।

(ii) विन्दु A बाट 7.2cm को अर्धव्यास र विन्दु B बाट 6.3 cm को अर्धव्यासको चापहरू खिच्नुहोस् । काटिएको विन्दुलाई C नाम राख्नुहोस् ।

(iii) A र C तथा B र D जोड्नुहोस् ।

(iv) विन्दु A र विन्दु C मा एकान्तर कोण बनाउनुहोस् ।

(v) C बाट जाने रेखालाई MN नाम दिनुहोस् ।

(vi) AB को आधाभन्दा बढी अर्धचाप लिएर A र B बाट AB को लम्बार्धक खिच्नुहोस् ।

(vii)	AB मा काटिएको विन्दुलाई D र MN मा काटिएको विन्दुलाई E नाम दिनुहोस् ।
(viii)	BD लाई कम्पासको सहायताले नापेर त्यही अर्धव्यासको नाप अनुसारले विन्दु E बाट MN मा विन्दु लगाउनुहोस् ।
(ix)	B र F जोड्नुहोस् ।
(x)	आवश्यक ΔABC को क्षेत्रफल = आयत BDEF को क्षेत्रफल तयार भयो ।

उदाहरण : 2

त्रिभुज ABC को रचना गर्नुहोस् । जसमा a = 7.8 से.मी., b = 7.2 से.मी. र c = 6.3 से.मी. छन् । उक्त त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुनेगरी एउटा कोण $\angle DBE = 75^0$ भएको एउटा समानान्तर चतुर्भुज DBEF को रचना गर्नुहोस् ।

समाधान :

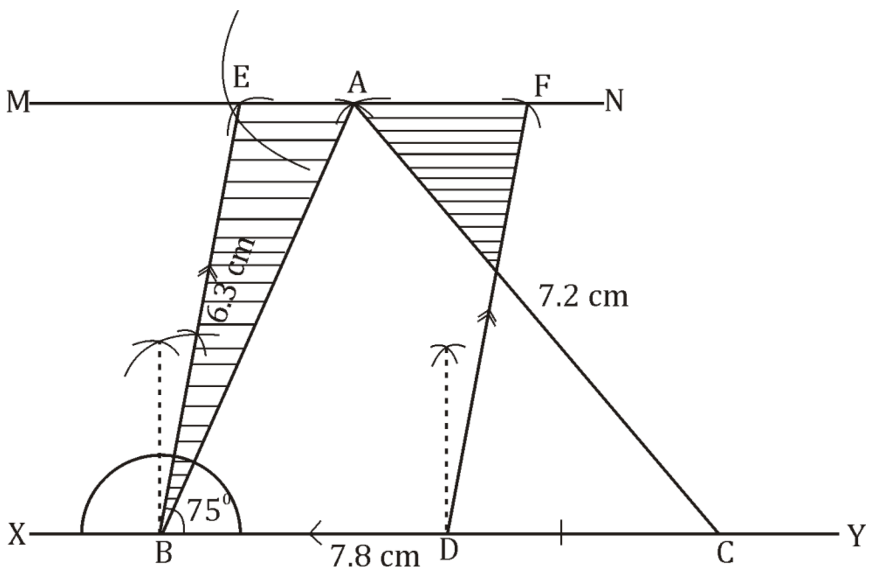
दिइएको : a = 7.8 से.मी. (BC)

b =7.2 से.मी. (AC)

c = 6.3 से.मी. (AB)

रचना गर्नुपर्ने :

ΔABC को क्षेत्रफल = स.च. DBEF को क्षेत्रफल ($\angle DBE = 75^0$ भएको)



∴ आवश्यक ΔABC को क्षेत्रफल = आयत DBEF को क्षेत्रफल तयार भयो ।

रचना गर्ने विधि :

(i) XY आधार रेखामा BC (a) = 7.8 cm को रेखा खण्ड खिच्नुहोस् ।

(ii) विन्दु B बाट 6.3cm र विन्दु C बाट 7.2 cm का अर्धव्यासहरूका चाप खिच्नुहोस् । काटिएको विन्दुलाई A नाम दिनुहोस् ।

(iii) A र B तथा A र C जोड्नु होस् ।

(iv) विन्दु B र विन्दु A मा एकान्तरकोण बनाउनुहोस् (बराबर हुने गरी) ।

(v) A बाट जाने रेखालाई MN नाम राख्नुहोस् ।

(vi) BC को मध्यविन्दु D पत्ता लगाउनुहोस् (लम्बार्धक खिचेर) ।

(vii) विन्दु B मा 75^0 को कोण बनाउनु होस् र MN मा काटिएको विन्दुलाई E नाम दिनुहोस् ।

(viii) BD को नाम बराबरको अर्धव्यासले विन्दु E बाट N तिर काट्नुहोस् । F नाम राख्नुहोस् ।

(ix) D र F जोड्नु होस् ।

(x) आवश्यक ΔABC को क्षेत्रफल = समानान्तर चतुर्भुज DBEF को क्षेत्रफल तयार भयो ।

उदाहरण : 3

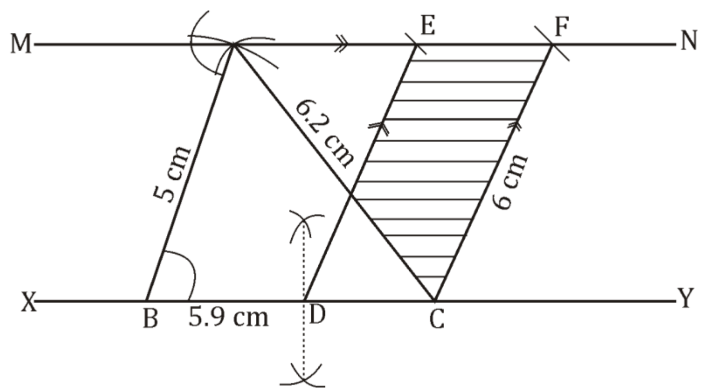
a = 5.9 से.मी., b = 6.2 से.मी. र c = 5 से.मी. भएको एउटा त्रिभुज ABC को रचना गरी उक्त त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुनेगरी एउटा भुजा CF =6 से.मी. भएको एउटा समानान्तर चतुर्भुज CDEF को रचना गर्नुहोस् ।

समाधान :

दिइएको : a = 5.9 से.मी. (BC)

b = 6.2 से.मी. (AC)

c = 5 से.मी. (AB)



रचना गर्नुपर्ने : ΔABC को क्षेत्रफल = (CF = 6 से.मी. भएको) स.च. CDEF को क्षेत्रफल ।

∴ आवश्यक ΔABC को क्षेत्रफल = स.च. CDEF को क्षेत्रफल तयार भयो ।

रचना गर्ने विधि :

(i) XY आधार रेखामा BC = 5.9 cm को रेखाखण्ड खिच्नुहोस् ।

(ii) विन्दु B बाट 5 cm र विन्दु C बाट 6.2 cm का अर्धव्यासहरूका चापहरूले काट्नुहोस् ।

काटिएको विन्दुलाई A नाम दिनुहोस् ।

(iii) A र B तथा A र C जोड्नुहोस् ।

(iv) विन्दु B र विन्दु A मा एकान्तरकोण बनाउनु होस् ।

(v) विन्दु A बाट जाने रेखालाई MN नाम दिनुहोस् ।

(vi) BC को मध्यविन्दु D पत्ता लगाउनुहोस् (लम्बार्धक खिचेर) ।

(vii) विन्दु C बाट CF = 6 cm को अर्धव्यासको चापले MN रेखामा F विन्दुमा काट्नुहोस् ।

(viii) DC बराबरको अर्धव्यासको चापले विन्दु F बाट A तिर काट्नुहोस् । काटिएको विन्दुलाई E नाम दिनुहोस् ।

(ix) E र D तथा F र C जोड्नुहोस् ।

(x) ΔABC को क्षेत्रफल = स.च. CDEF को क्षेत्रफल तयार भयो ।

उदाहरण : 4

AB = 5.5 से.मी., BC = 5 से.मी. र AC = 4.8 से.मी. भएको त्रिभुजको रचना गरी ΔABC को क्षेत्रफलसँग बराबर हुनेगरी एउटा भुजा 6.6 से.मी. भएको ΔDBC को रचना गर्नुहोस् ।

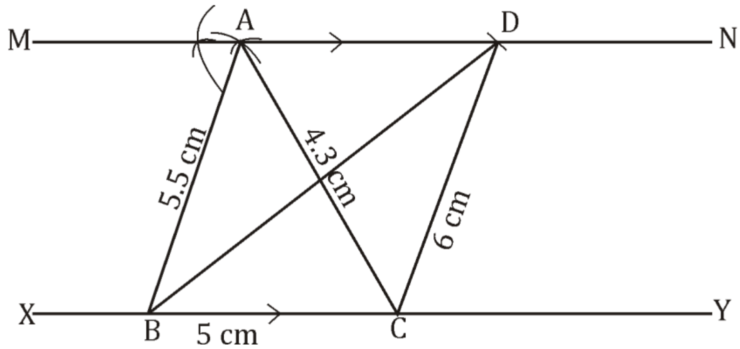
समाधान :

दिइएको: AB = 5.5 से.मी.

BC = 5 से.मी.

AC = 4.8 से.मी.

रचना गर्नुपर्ने : ΔABC को क्षेत्रफल = ΔDBC को क्षेत्रफल (एउटा भुजा 6.6 से.मी. भएको)



$\therefore$ आवश्यक ΔABC को क्षेत्रफल = ΔDBC को क्षेत्रफल तयार भयो ।

रचना गर्ने विधि :

(i) XY आधार रेखामा BC = 5 cm को रेखा खण्ड खिच्नुहोस् ।

(ii) विन्दु B बाट 5.5 cm र विन्दु C बाट 4.8 cm का अर्धव्यासहरूका चापले काट्नु होस् । काटिएको विन्दुलाई A नाम दिनुहोस् ।

(iii) A र B तथा A र C जोड्नुहोस् ।

(iv) विन्दु B र विन्दु A मा एकान्तर कोण बनाउनु होस् ।

(v) विन्दु A बाट जाने रेखालाई MN नाम दिनुहोस् ।

(vi) विन्दु C बाट 6 cm को अर्धव्यासको नापको चापले MN रेखामा काट्नु होस् । काटिएको विन्दुलाई D नाम दिनुहोस् ।

(vii) D र B तथा D र C जोड्नु होस् ।

(viii) ΔABC को क्षेत्रफल = ΔDBC को क्षेत्रफलल तयार भयो ।

उदाहरण : 5

AB = 5.2 से.मी., AC = 6.2 से.मी. र BD = 8.4 से.मी. नाप भएको समानान्तर चतुर्भुजको रचना गरी उक्त समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुनेगरी एउटा कोण 75^0 भएको त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।

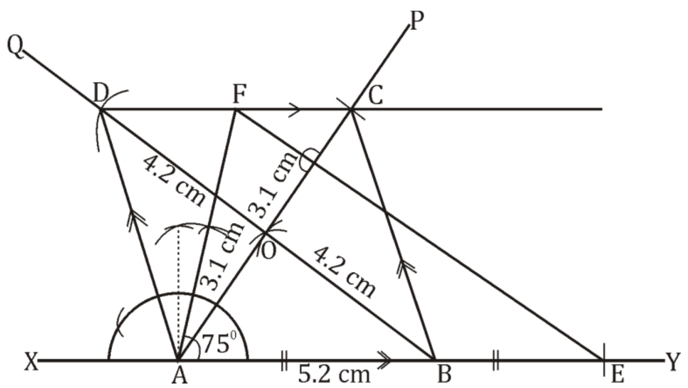
समाधान :

दिइएको : AB = 5.2 से.मी.

AC = 6.2 से.मी. (विकर्ण)

BD = 8.4 से.मी. (विकर्ण)

रचना गर्नुपर्ने : स.च. ABCD को क्षेत्रफल = एउटा त्रिभुजको क्षेत्रफल (समकोण 75^0 भएको) ।



$\therefore$ आवश्यक स.च. ABCED को क्षेत्रफलसँग बराबर हुने ΔAEF को क्षेत्रफल तयार भयो ।

रचना गर्ने विधि

(i) XY आधार रेखामा AB = 5.2 cm को रेखा खण्ड खिच्नु होस् ।

(ii) विन्दु A बाट विकर्ण AC को आधा चाप 3.1 cm र विन्दु B बाट विकर्ण BD को आधाचाप 4.2 cm का अर्धव्यासका नापहरूले चाप काटौँ । काटिएको विन्दुलाई O नाम दिनुहोस् ।

(iii) A र O तथा B र O जोड्नुहोस् । BO र AO लाई क्रमशः Q र P सम्म लम्ब्याउनुहोस् ।

(iv) AO बराबरको नापले OP मा काट्नुहोस् । OB बराबरको नापले OQ मा काट्नुहोस् । काटिएको विन्दुलाई क्रमशः C र D जोड्नुहोस् ।

(v) A र D, B र C तथा C र D जोड्नुहोस् ।

(vi) विन्दु A मा 75^0 को कोण बनाउनुहोस् । CD लाई काटिएको विन्दुलाई F नाम दिनुहोस् । यहाँ AB = BE हुन्छ ।

(vii) AB बराबरको नापले विन्दु B बाट Y तिर काट्नुहोस् । काटिएको विन्दुलाई E नाम दिनुहोस् ।

(viii) E र F जोड्नुहोस् ।

(ix) आवश्यक स.च. ABCD को क्षेत्रफल = त्रिभुज AEF को क्षेत्रफल तयार भयो ।

उदाहरण : 6

एउटा चतुर्भुज PQRS को रचना गर्नुहोस् जसमा QR = 5.3 से.मी., RS = 5 से.मी., PS = 5.7 सेमी., PQ = 6.2 से.मी. र PR = 5.6 से.मी. छन् । उक्त चतुर्भुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने गरी एउटा त्रिभुज QRT को पनि रचना गर्नुहोस् ।

समाधान :

दिइएको : QR = 5.3 से.मी.

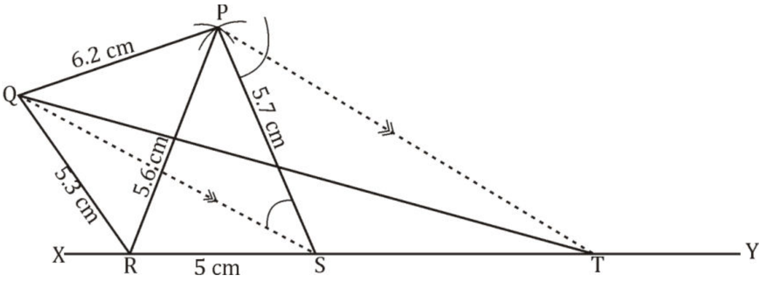
RS = 5 से.मी.

PS = 5.7 से.मी.

PQ = 6.2 से.मी.

PR = 5.6 से.मी.

रचना गर्नुपर्ने : चतुर्भुज PQRS को क्षेत्रफल = ΔQRT को क्षेत्रफल



∴ चतुर्भुज PQRS को क्षेत्रफल = ΔQRT को क्षेत्रफल तयार भयो ।

रचना गर्नुपर्ने :	
(i)	XY आधार रेखामा RS = 5 cm को रेखा खण्ड खिच्नुहोस् ।
(ii)	विन्दु R बाट PR = 5.6 cm र विन्दु S बाट PS = 5.7 cm को अर्धव्यासका नापले चाप काट्नुहोस् । काटिएको विन्दुलाई P नाम दिनुहोस् ।
(iii)	P र R तथा P र S जोड्नुहोस् ।
(iv)	विन्दु P बाट PQ = 6.2 cm र विन्दु R बाट RQ = 5.3 cm का अर्धव्यासका नापले चाप काट्नुहोस् ।
(v)	Q र P तथा Q र R जोड्नुहोस् ।
(vi)	विकर्ण QS जोड्नुहोस् ।
(vii)	QSP को एकान्तर कोण हुनेगरी विन्दु P मा बराबर कोण बनाउनु होस् ।
(viii)	XY मा प्रतिच्छेदन भएको विन्दुलाई T नाम दिनुहोस् ।
(ix)	Q र T जोड्नुहोस् ।
(x)	चतुर्भुज PQRS को क्षेत्रफल = ΔQRT को क्षेत्रफल तयार भयो ।

अभ्यास : 5 लामो उत्तर आउने प्रयोग सम्बन्धी प्रश्नहरू

(क) AB = 5.7 से.मी., BC = 6.3 से.मी. र AC = 5.1 से.मी. नाप भएको ΔABC को रचना गरी उक्त त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने गरी निम्न लिखित ज्यामितिय चित्रहरूलाई बेग्लाबेग्लै खिच्नुहोस् ।

(i) आयतको रचना गर्नुहोस् ।

(ii) एउटा कोण 60^0 भएको समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।

(iii) एउटा कोण 75^0 भएको अर्को त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।

(ख) AB = 6.5 से.मी., AC = 10.2 से.मी. र BD = 6.8 से.मी. नाप भएको समानान्तर चतुर्भुज ABCD को रचना गरी उक्त समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने गरी निम्न लिखित ज्यामितीय चित्रहरूलाई बेग्ला बेग्लै खिच्नुहोस् ।

(i) आयतको रचना गर्नुहोस् ।

(ii) एउटा भुजा 8.7 से.मी. भएको त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।

(iii) एउटा कोण 45^0 भएको अर्को एउटा समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।

(ग) $PQ = 7.1$ से.मी. $\angle PQS = 30^0$ र $QR = 5.1$ से.मी. नाप भएको समानान्तर चतुर्भुज PQRS को रचना गर्नुहोस् । साथै उक्त समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने गरी निम्न लिखित ज्यामितीय चित्रहरूलाई बेग्लाबेग्लै खिच्नुहोस् ।

(i) एउटा आयतको रचना गर्नुहोस् ।

(ii) एउटा कोण 60^0 भएको त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।

(iii) एउटा भुजा 8.5 से.मी. भएको अर्को एउटा समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।

(घ) $AB = 4.9$ से.मी. $BC = 5.5$ से.मी. $CD = 5.6$ से.मी. $AD = 6.1$ से.मी. र $\angle BAD = 75^0$ भएको चतुर्भुज ABCD को रचना गरी उक्त चतुर्भुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने गरी त्रिभुज ADE को रचना गर्नुहोस् ।

(ङ) $PQ = 5.5$ से.मी., $QR = 4.9$ से.मी. $RS = 6.2$ से.मी., $PS = 5.8$ से.मी. र $QS = 5.3$ से.मी. भएको चतुर्भुज PQRS को रचना गरी उक्त चतुर्भुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुनेगरी त्रिभुज QRT को रचना गर्नुहोस् ।

6. **पृष्ठपोषण :**

(क) (i) उदाहरण (1) जस्तै गर्नुहोस् ।

(ii) उदाहरण (2) जस्तै गर्नुहोस् ।

(iii) उदाहरण (4) जस्तै आधारको कुनै विन्दुमा 75^0 को कोण बनाई अर्को त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।

(ख) (i) उदाहरण (5) जस्तै समानान्तर चतुर्भुजको रचना गरी आधारको कुनै एउटा विन्दुमा 90^0 को कोण बनाइ आयतको रचना गर्नुहोस् ।

(ii) उदाहरण (5) जस्तै समानान्तर चतुर्भुजको रचना गरी आधारका कुनै एउटा विन्दु 8.6 से.मी.ले समानान्तर रेखालाई काटेर त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।

(iii) उदाहरण (5) जस्तै समानान्तर चतुर्भुजको रचना गरी आधारको कुनै एउटा विन्दुमा 45^0 को कोण बनाई अर्को एउटा समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।

(ग) (i) समानान्तर चतुर्भुज PQRS को रचना गरी आधारको कुनै एउटा विन्दुमा 90^0 को कोण बनाइ आयतको रचना गर्नुहोस् ।

(ii) समानान्तर चतुर्भुजको रचना गरी सकेपछि आधारलाई दोब्बर बनाइ आधारको छेउ-छेउका विन्दुमध्ये एउटा विन्दुमा 60^0 को कोण बनाई त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।

(iii) समानान्तर चतुर्भुजको रचना गरी आधारका कुनै एक विन्दुबाट समानान्तर रेखामा 5.5 से.मी.ले काटेर अर्को समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।

(घ) उदाहरण (8) जस्तै चतुर्भुजको रचना गरी उक्त चतुर्भुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने अर्को एउटा त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।

(ङ) उदाहरण (6) जस्तै गर्नुहोस् ।

7. **सारांश** :

(क) समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल बराबर हुने गरी, समानान्तर चतुर्भुज, आयत वा त्रिभुजको रचना गर्न सकिन्छ ।

(ख) त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने गरी, त्रिभुज, आयत वा समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्न सकिन्छ ।

(ग) चतुर्भुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने गरी त्रिभुजको रचना गर्न सकिन्छ ।

पाठ : 15

वृत्त (Circle)

1. **परिचय** :

यस पाठमा वृत्तको परिचय, वृत्त सम्बन्धी आधारभूत धारणा, वृत्तको चाप र त्यसमा आधारित परिधि र केन्द्रीय कोण तथा चक्रीय चतुर्भुज सम्बन्धी साध्यहरूको प्रयोगात्मक तथा सैद्धान्तिक प्रमाणहरू, स्पर्श रेखा सम्बन्धी अवधारणा र तीसँग सम्बन्धित समस्याहरू समावेश गरिएको छ ।

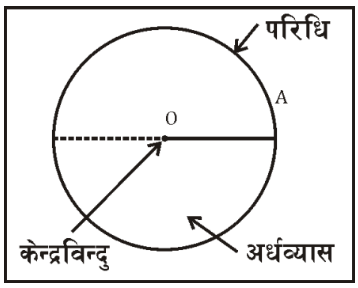
2. **सिकाइ उपलब्धि** :

यस एकाइको अध्ययनपछि निम्नलिखित सिकाई उपलब्धि हासिल हुनेछ :

- वृत्तका चाप र कोण सम्बन्धी गुण/साध्यहरू प्रमाणित/पुष्टि गर्न
- वृत्तका चाप र कोण सम्बन्धी गुणको अन्तरसम्बन्धी गुणहरूको अर्न्तसम्बन्ध देखाउन र समस्याहरू समाधान गर्न ।

3. **आधारभूत विषय वस्तु** :

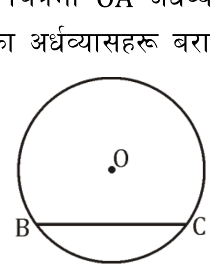
(क) **वृत्त (Circle)** : एउटा निश्चित विन्दुलाई बराबर दुरीमा पर्ने चल विन्दुको विन्दुपथलाई वृत्त भनिन्छ । उक्त निश्चित विन्दु वृत्तको केन्द्र हो । अर्को शब्दमा वृत्त एउटा बन्द वक्र रेखा हो, जसको सबै विन्दुहरू एउटै सतहमा रही कुनै निश्चित विन्दुबाट बराबर दूरीमा हुन्छन् । चित्रमा वृत्तलाई ⊙ ले जनाइन्छ । O केन्द्रविन्दु हो ।



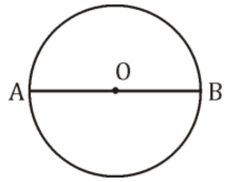
(ख) **परिधि (Circumference)** : वृत्तको बाहिरी घेरालाई परिधि भनिन्छ । परिधिले वृत्तको केन्द्रविन्दुमा 360^0 को कोण बनाउँदछ ।

(ग) **अर्धव्यास (Radius)** : कुनै वृत्तको केन्द्रविन्दुदेखि त्यो वृत्तको परिधिको कुनै विन्दुसम्म जोड्ने सीधा रेखालाई त्यो वृत्तको अर्धव्यास भनिन्छ । माथिको चित्रमा OA अर्धव्यास हो । अर्धव्यासलाई त्रिज्या वा व्यासार्ध पनि भनिन्छ । एउटै वृत्तका अर्धव्यासहरू बराबर हुन्छन् ।

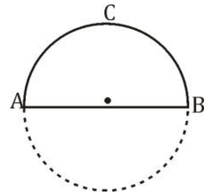
(घ) **जीवा (Chord)** : वृत्तको परिधिका कुनै दुई विन्दुहरू जोड्ने रेखाखण्डलाई रेखालाई सो वृत्तको जीवा भनिन्छ । चित्रमा BC एउटा जीवा हो ।



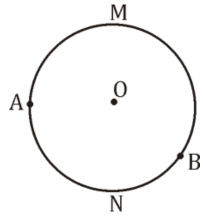
(ङ) **व्यास** (Diameter) : वृत्तको केन्द्रविन्दु भएर जाने जीवालाई सो वृत्तको व्यास भनिन्छ । व्यासको लम्बाइ अर्धव्यासको दोब्बर हुन्छ । एउटै वृत्तका व्यासहरू बराबर हुन्छन् । व्यास वृत्तको सब भन्दा लामो जीवा हो । चित्र AB व्यास हो ।



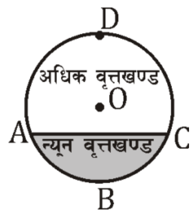
(च) **अर्धवृत्त** (Semi-circle) : वृत्तको व्यासले वृत्तलाई दुई बराबर भागमा विभाजन गर्दछ र प्रत्येक भागलाई अर्धवृत्त भनिन्छ । चित्रमा ACB एउटा अर्धवृत्त हो ।



(छ) **चाप** (Arc) : एउटा वृत्तको परिधिको कुनै अंशलाई सो वृत्तको चाप भनिन्छ । विन्दु A र B ले निर्धारण गरेको चापलाई न्यून (लघु) चाप भनिन्छ । चित्रमा AMB अधिक चाप र ANB लघुचाप हुन् ।

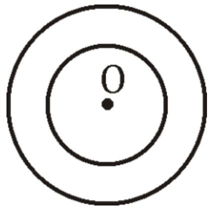


(ज) **वृत्तखण्ड** (Segment) : कुनै जीवाले बनेको बन्दचित्रलाई वृत्तखण्ड भनिन्छ । कुनै चापको दुई विन्दुहरू जोड्दा बन्ने बन्दचित्र वृत्त खण्ड हो । एउटा जीवाले वृत्तलाई एउटा न्यून (लघु) वृत्तखण्ड र अर्को अधिक वृत्तखण्ड गरी दुई वृत्तखण्डमा विभाजन गर्दछ । चित्रमा ABC न्यून वृत्तखण्ड र ADC अधिक वृत्तखण्ड हो ।



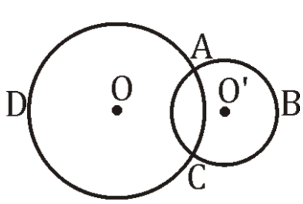
(झ) **क्षेत्रक** (Sector) : एउटा वृत्तमा दुईओटा अर्धव्यास र तिनीहरूबिचको चापद्वारा बनेको बन्द चित्रलाई सो वृत्तको क्षेत्रक भनिन्छ । दुईओटा अर्धव्यासहरूले वृत्तलाई एउटा न्यून (लघु) र अर्को अधिक क्षेत्रक गरी दुई क्षेत्रकमा विभाजन गर्दछ । दिइएको चित्रमा छायाँ पारेको भाग न्यून क्षेत्रक हो भने छायाँ नपारिएको भाग अधिक क्षेत्रक हो ।

(ञ) **एक केन्द्रित वृत्तहरू** (Concentric Circles) : केन्द्र विन्दु साझा भएका वृत्तहरूलाई एक केन्द्रित वृत्त भनिन्छ । अथवा दुई वा सो भन्दा बढी वृत्तहरूको एउटै केन्द्र विन्दु हुन्छन् भने त्यस किसिमको वृत्तहरूलाई एक केन्द्रित वृत्त भनिन्छ ।



(ट) **प्रतिच्छेदित वृत्तहरू** (Intersecting Circles) : दुई वृत्तहरू कुनै दुई विन्दुहरूमा प्रतिच्छेदित भएका छन् भने ती वृत्तहरूलाई प्रतिच्छेदित वृत्तहरू भनिन्छ ।

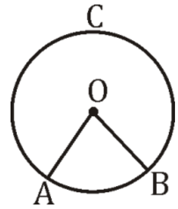
चित्रमा ⊙ADC र ⊙ABC दुई विन्दुहरू A र C मा



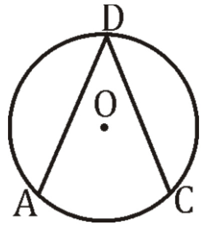
प्रतिच्छेदन भएका छन् । AC जीवा तिनीहरूको साझा जीवा हो ।

(ठ) **बराबर वृत्तहरू** (Equal Circle) : व्यास वा अर्धव्यास बराबर भएका वृत्तहरूलाई बराबर वृत्तहरू भनिन्छ ।

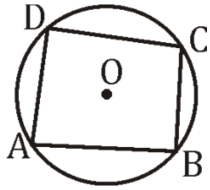
(ड) **केन्द्रीय कोण** (Central Angle) : वृत्तका दुईओटा अर्धव्यासहरूले केन्द्रमा निर्धारण गरेको कोणलाई केन्द्रीय कोण भनिन्छ । चित्रमा $\angle AOB$ केन्द्रीय कोण हो । केन्द्रीय कोण र चापबिच प्रत्यक्ष सम्बन्ध हुन्छ । छोटकरीमा $\angle AOB \cong \widehat{AB}$ वा $\angle AOB \doteq \widehat{AB}$ लेख्ने प्रचलन छ ।



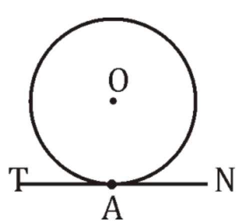
(ढ) **परिधिकोण** (Angle at the circumference) : वृत्तको दुईओटा जीवाहरू परिधिको कुनै एक विन्दुमा मिलेर बनाएको कोणलाई परिधिकोण भनिन्छ । चित्रमा $\angle ABC$ परिधि कोण हो । यसलाई अन्तर्गतकोण(Inscribed angle) पनि भनिन्छ । वृत्तमा परिधिको कोण सो कोणले निर्धारण गर्ने चापको आधा हुन्छ । अर्थात् $\angle ABC \doteq \frac{1}{2}\widehat{AC}$ हुन्छ ।



(ण) **चक्रीय चतुर्भुज** (Cyclic quadrilateral) : कुनै चतुर्भुजको चार ओटै शीर्ष विन्दुहरू एउटै वृत्तको परिधिमा परेको छ भने त्यस्तो चतुर्भुजलाई चक्रीय चतुर्भुज भनिन्छ । चित्रमा ABCD चक्रीय चतुर्भुज हो ।



(त) **स्पर्श रेखा** (Tangent) : स्पर्श विन्दु (point of contact) : वृत्तको कुनै एउटा विन्दुलाई मात्र छोएर जाने सिधा रेखालाई स्पर्श रेखा भनिन्छ । छोएको विन्दुलाई स्पर्श विन्दु भनिन्छ । चित्रमा TN स्पर्श रेखा हो । A स्पर्श विन्दु हो ।



(थ) वृत्तको केन्द्र विन्दुबाट कुनै जीवा खिचेको जीवाले त्यस जीवालाई समद्विभाजन गर्छ ।

(द) वृत्तको कुनै जीवाको मध्ये विन्दु र केन्द्र विन्दु जोड्ने रेखा जीवामा लम्ब हुन्छ ।

(ध) कुनै वृत्तको जीवाको लम्बार्धक उक्त वृत्तको केन्द्र विन्दुबाट जान्छ ।

(न) वृत्तको बराबर दुई जीवाहरू केन्द्र विन्दुबाट बराबर दुरीमा पर्दछ ।

(प) वृत्तको केन्द्र विन्दुबाट बराबर दुरीमा रहेका जीवाहरू बराबर हुन्छन् ।

(फ) पाइथागोरसको सुत्र $h^2 = p^2 + b^2$ [$\because$ समकोणी त्रिभुजको कर्ण = h; लम्ब = p र आधार = b]

(ब) समद्विवाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

(भ) त्रिभुजको एउटा भुजालाई बढाउँदा बन्ने बाहिरी कोण अनासन्न दुई भित्री कोणहरूको

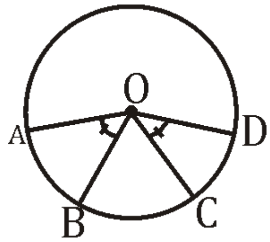
योगफलसँग बराबर हुन्छ ।

4. **मुख्य विषयवस्तु**

(क) **साध्यहरू**

साध्य : 4

वृत्तमा बराबर केन्द्रीय कोणहरू बनाउने चापहरू बराबर हुन्छन् ।



वृत्तमा बराबर केन्द्रीय कोणहरू $\angle AOB$ र $\angle COD$ छन् ।
अथवा $\angle AOB = \angle COD$ छन् । त्यसैले चाप $\widehat{AB}$ = चाप $\widehat{CD}$ हुन्छ ।
सँगैको चित्रमा चाप $\widehat{AB}$ र चाप $\widehat{CD}$ बराबर भएकोले ती चापहरूले बनाएको क्षेकहरू पनि बराबर हुन्छन् । अथवा क्षेत्रक AOB = क्षेत्रक COD हुन्छ । यदि क्षेत्रका AOB र क्षेत्रक COD लाई काटेर एक आपसमा खप्ट्याइयो भने सबै भागहरू बराबर हुने भएकोले क्षेत्रक AOB र क्षेत्रक COD आपसमा अनुरूप हुन्छन् । त्यसैले क्षेत्रकहरूका $\widehat{AB}$ र $\widehat{CD}$ बराबर हुन्छन् ।

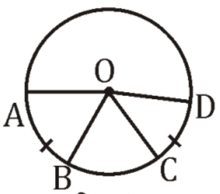
अतः एउटै वा बराबर वृत्तका बराबर केन्द्रीय कोणहरूले बनाउने चापहरू पनि बराबर हुन्छन् ।

साध्य : 4 को विलोम

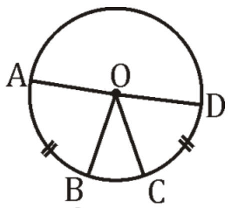
कुनै वृत्तका बराबर चापहरूले केन्द्रमा बनाएका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

प्रयोगात्मक परीक्षण

चरण 1 : 3 cm भन्दा बढी अर्धव्यासहरू लिएर 2 ओटा वृत्तहरू बनाउँ । $\widehat{AB}$ र $\widehat{CD}$ लिएर केन्द्र विन्दु O मा A, B, C र D लाई जोडिएका छन् । केन्द्रीय कोणहरू $\angle AOB$ र $\angle COD$ बनेका छन् ।



चित्र नं. I



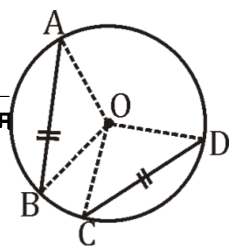
चित्र नं. II

चरण 2 : परीक्षण गर्नुपर्ने : $\angle AOB = \angle COD$
चरण 3 : प्रत्येक चित्रको केन्द्रीय कोणहरू नापेर तालिकामा राख्दा ।

चित्र नं.	$\angle AOB$	$\angle COD$	नतिजा
I			$\angle AOB = \angle COD$
II			$\angle AOB = \angle COD$

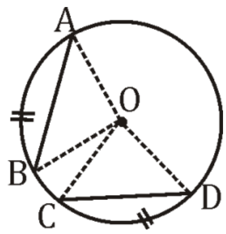
चरण 4 : **निश्कर्ष**
$\angle AOB$ र $\angle COD$ बराबर भएकोले कुनै वृत्तका बराबर चापहरूले केन्द्रमा बनाएका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

साध्य : 5
कुनै वृत्तका दुई जीवाहरू बराबर छन् भने ती जीवाहरूले काटेका चापहरू बराबर हुन्छन् । जीवा AB र जीवा CD बराबर छन् भने, ती जीवाहरूले काटेका चापहरू $\widehat{AB}$ र $\widehat{CD}$ पनि



बराबर हुन्छन् किनभने विन्दुहरू A, B, C र D लाई केन्द्र विन्दु O सँग जोडेपछि ΔAOB र ΔCOD लाई अनुरूप देखाउन सकिन्छ । त्यस्तै AOB र COD लाई अनुरूप देखाइ सकेपछि, $\angle AOB$ र $\angle COD$ बराबर हुने भएकोले ती केन्द्रीय कोणहरूले बनाएको सम्मुख चाप $\overset{\frown}{AB}$ र $\overset{\frown}{CD}$ पनि बराबर हुन्छन् ।

साध्य : 5 **को विलोम**



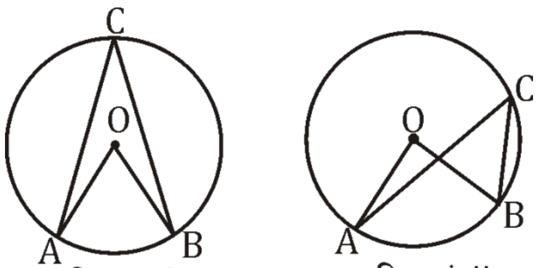
कुनै वृत्तका दुई जीवहरूले काटेका चापहरू बराबर छन् भने ती जीवाहरू बराबर हुन्छन् । चापहरू $\overset{\frown}{AB}$ बराबर $\overset{\frown}{CD}$ भए जीवा AB बराबर जीवा CD हुन्छ किनभने विन्दुहरू A, B, C र D लाई केन्द्र विन्दु O सँग जोडेर ΔAOB र ΔCOD लाई अनुरूप गरी संगति भुजाहरू बराबर हुने भएकोले बराबर चापले बनाएका जीवाहरू पनि बराबर हुन्छन् ।

साध्य : 6

कुनै वृत्तको एउटै चापमा आधारित केन्द्रीय कोण परिधिमा बनेको कोणको दुई गुणा हुन्छ भनी प्रयोगद्वारा देखाउनुहोस् । अर्धव्यास 3cm भन्दा बढी भएका फरक फरक नापका दुई ओटा वृत्तहरू बनाउनु पर्ने छ ।

समाधान :

चरण 1 : अर्धव्यास 3cm भन्दा बढी लिएर दुईओटा फरक फरक नापका वृत्तहरु खिचिएका छन् । प्रत्येक वृत्तमा चाप AB मा आधारित केन्द्रीय कोण AOB र परिधिको कोण ACB खिचिएका छन् ।



चित्र नं. I　　**चित्र नं. II**

चरण 2 : परीक्षण गर्नुपर्ने : $\angle AOB = 2\angle ACB$

चरण 3 : प्रत्येक चित्रको केन्द्रीय कोण र परिधिको कोण नापेर तालिकामा राख्दा

चित्र नं.	$\angle AOB$	$\angle ACB$	नतिजा
I			$\angle AOB = 2\angle ACB$
II			$\angle AOB = 2\angle ACB$

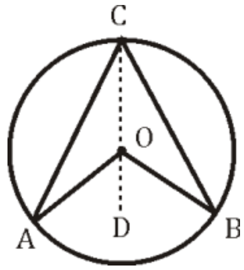
चरण 4 : निश्कर्षः- केन्द्रीय कोण $\angle AOB$ परिधिमा बनेको कोण $\angle ACB$ को दोब्बर छ । त्यसैले कुनै वृत्तको एउटै चापमा आधारित केन्द्रीय कोण परिधिमा बनेको कोणको दुई गुणा हुन्छ ।

साध्य : 6 (**सैद्धान्तिक प्रमाण**)

कुनै वृत्तको एउटै चापमा आधारित केन्द्रीय कोण परिधिमा बनेको कोणको दुई गुणा हुन्छ भनी सिद्ध गर्नुहोस् ।

थाहा दिएको : ⊙ABC मा

(i) एउटै चाप $\widehat{AB}$ मा आधारित केन्द्रीय कोण $\angle AOB$ र परिधिको कोण $\angle ACB$ छन् ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle AOB = 2\angle ACB$

रचना : C र O जोडौँ र CO लाई D सम्म लम्ब्याऔँ ।

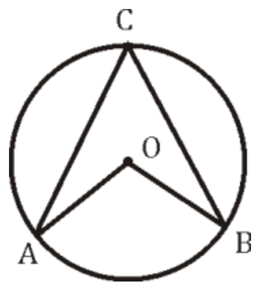
प्रमाण :

	तथ्यहरू		**कारणहरू**
1.	ΔAOC मा $\angle OAC = \angle OCA$	1.	OA = OC हुनाले (समाद्विवाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू)
2.	ΔBOC मा $\angle OBC = \angle OCB$	2.	OB = OC हुनाले (समाद्विवाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू)
3.	$\angle AOD = \angle OAC + \angle OCA$	3.	त्रिभुजको एउटा भुजालाई बढाउँदा बन्ने बाहिरीकोण अनासन्न दुई भित्री कोणहरूको योगफलसँग बराबर हुने हुनाले ।
4.	$\angle BOD = \angle OBC + \angle OCB$	4.	कारण (3) जस्तै
5.	$\angle AOD = \angle OCA + \angle OCA$ $\therefore \angle AOD = 2\angle OCA$	5.	तथ्य नं. (1) र (3) बाट
6.	$\angle BOD = \angle OCB + \angle OCB$ $\angle BOD = 2\angle OCB$	6.	तत्य नं. (2) र (4) बाट
7.	$\angle AOD + \angle BOD = 2(\angle OCA + \angle OCB)$	7.	तथ्य नं. (5) र (6) जोड्दा
8.	$\angle AOB = 2\angle ACB$	8.	तथ्य नं. 7 बाट (सिङ्गो टुक्रे तथ्य)

प्रमाणित भयो ।

अर्को तरिका

थाहा दिएको : ⊙ ABC मा, एउटै चाप $\widehat{AB}$ मा आधारित केन्द्रीय कोण $\angle AOB$ र परिधिको कोण $\angle ACB$ छन् ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle AOB = 2\angle ACB$

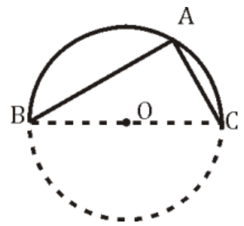
प्रमाण :

	तथ्यहरू		कारणहरू
1.	$\angle AOB = \widehat{AB}$	1.	वृत्तको केन्द्रीय कोण र त्यसको सम्मुख चापको सम्बन्ध
2.	$\angle ACB \cong \frac{1}{2}\widehat{AB}$	2.	वृत्तको परिधिको कोण र त्यसको सम्मुख चापको सम्बन्ध
3.	$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$ $\therefore \angle AOB = 2\angle ACB$	3.	तथ्य नं. (1) र (2) बाट

प्रमाणित भयो ।

साध्य : 7 **को उपसाध्य**

अर्धवृत्तमा बन्ने परिधिको कोण एक समकोण हुन्छ भनी सिद्ध गर्नुहोस् ।



थाहा दिएको : $\angle BAC$ मा केन्द्र विन्दु O छ । BC व्यास हो । $\angle BAC$ व्यासमा आधारित परिधिको कोण हो ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle BAC = 90^0$ [**एक समकोण**]

प्रमाण :

	तथ्यहरू		कारणहरू
1.	$\angle BOC \cong \widehat{BC}$	1.	केन्द्रीय कोण र सम्मुख चापको सम्बन्ध
2.	$\angle BAC \cong \frac{1}{2}\widehat{BC}$	2.	परिधिको कोण र सम्मुख चापको सम्बन्ध
3.	$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$	3.	तथ्य नं. (1) र (2) बाट
4.	$\angle BAC = \frac{1}{2}\times 180^0$ $\therefore \angle BAC = 90^0$	4.	तथ्य नं. (3) बाट $\angle BOC$ सरल कोण हुनाले ।

प्रमाणित भयो ।

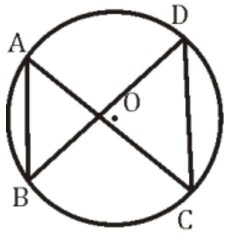
साध्य : 8

वृत्तको एउटै चापमा आधारित परिधिका कोणहरू बराबर हुन्छन् भनी प्रयोगद्वारा सिद्ध गर्नुहोस् । (फरक फरक अर्धव्यास भएका दुईओटा वृत्तहरू बनाउनु पर्ने छ । वृत्तको अर्धव्यास कम्तिमा 3 cm हुनु पर्दछ ।)

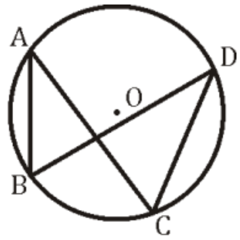
समाधान :

चरण 1 : अर्धव्यास 3cm भन्दा बढी लिएर फरक फरक नाप भएका दुईओटा वृत्तहरू बनाइएको छ ।

साथै एउटै चाप BC मा आधारित परिधिका कोणहरू $\angle BAC$ र $\angle BDC$ बनाइएको छ ।



चित्र नं. I



चित्र नं. II

चरण 2 : प्रयोगद्वारा सिद्ध गर्नुपर्ने : $\angle BAC = \angle BDC$

चरण 3 : प्रत्येक चित्रबाट परिधिको कोणहरू नापेर तालिकामा भर्ने ।

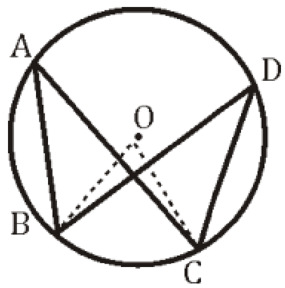
चित्र नं.	$\angle BAC$	$\angle BDC$	नतिजा
I			$\angle BAC = \angle BDC$
II			$\angle BAC = \angle BDC$

निश्कर्ष : माथिका चित्रहरूबाट प्राप्त नाप अनुसार नतिजा बराबर भएकोले वृत्तको एउटै चापमा आधारित परिधिका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

साध्य 8 : (**सैद्धान्तिक प्रमाण**)

वृत्तको एउटै चापमा आधारित परिधिका कोणहरू बराबर हुन्छन् भनी सिद्ध गर्नुहोस् ।

थाहा दिएको : ⊙ ABCD मा केन्द्रविन्दु ⊙ छ । एउटै चाप BC मा आधारित परिधिका कोणहरू $\angle BAC$ र $\angle BDC$ छन् ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle BAC = \angle BDC$

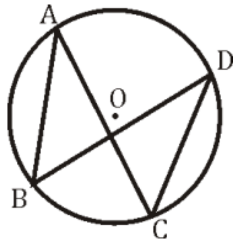
जुक्ति : B र O तथा C र O जोडौं ।

प्रमाण :

	तथ्यहरू		**कारणहरू**
1.	$\Delta BAC = \frac{1}{2}\widehat{BC}$	1.	परिधिको कोण र सम्मुख चापको सम्बन्ध
2.	$\Delta BDC \cong \frac{1}{2}\widehat{BC}$	2.	कारण (1) जस्तै
3.	$\angle BAC = \angle BDC$	3.	तथ्या नं. (1) र (2) बाट

प्रमाणित भयो ।

अर्को तरिका



थाहा दिएको : ⊙ ABCD मा केन्द्रविन्दु O छ । एउटै चाप BC मा आधारित परिधिका कोणहरू $\angle BAC$ र $\angle BDC$ बनेका छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle BAC = \angle BDC$

प्रमाण :

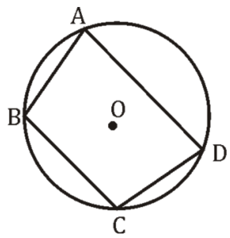
	तथ्यहरू		**कारणहरू**
1.	$\angle BAC \cong \frac{1}{2}\angle BOC$	1.	एउटै चापमा आधारित परिधिको कोण केन्द्रीय कोणको आधा हुनाले
2.	$\angle BDC \cong \frac{1}{2}\angle BOC$	2.	कारण (1) जस्तै
3.	$\angle BAC = \angle BDC$	3.	तथ्य नं. (1) र (2) बाट

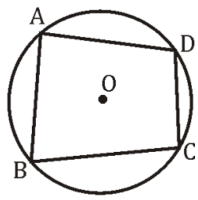
प्रमाणित भयो ।

साध्य : 9

चक्रीय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू परिपूरक हुन्छन् भनी प्रयोगद्वारा देखाउनुहोस् । अर्धव्यास 3cm भन्दा बढी भएका फरक फरक नापका दुई ओटा वृत्त बनाउनुपर्ने छ ।

समाधान :





चरण 1 : अर्धव्यास 3cm भन्दा बढी लिएर दुईओटा फरक फरक नापका वृत्तहरू खिचिएको छ । वृत्तचित्र फरक फरक आकारका चक्रीय चतुर्भुज ABCD खिचिएको छ ।

चरण 2 : प्रयोगद्वारा सिद्ध गर्नुपर्ने : $\angle A + \angle C = 180^0$

$\angle B + \angle D = 180^0$

चरण 3 : प्रत्येक चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू नापेर तालिकामा राख्दा

चित्र नं.	$\angle A$	$\angle C$	$\angle B$	$\angle D$	नतिजा
I					$\angle A + \angle C = 180^0$ $\angle B + \angle D = 180^0$
II					$\angle A + \angle C = 180^0$ $\angle B + \angle D = 180^0$

चरण 4 :

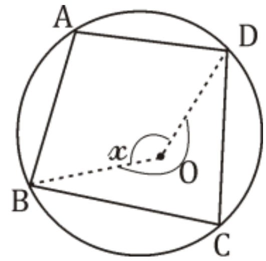
निश्कर्ष : सबै चित्रमा $\angle A + \angle C = 180^0$ र $\angle B + \angle D = 180^0$ छ । तसर्थ चक्रीय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू परिपूरक हुन्छन् ।

साध्य 9 : **सैद्धान्तिक प्रमाण**

थाहा दिएको : ⊙ ABCD मा

(i) केन्द्रविन्दु O छ ।

(ii) चक्रीय चतुर्भुज ABCD छ ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने : (i) $\angle BAC + \angle BCD = 180^0$

(ii) $\angle ABC + \angle ADC = 180^0$

जुक्ति : O र B तथा O र D जोडौँ ।

प्रमाण :

	तथ्यहरू		**कारणहरू**
1.	$2\angle BAD$ = वृत्तकोण $\angle BOD$ (y)	1.	एउटै $\widehat{\mathbf{BCD}}$ मा आधारित परिधिको कोण र केन्द्रीय कोणको सम्बन्ध
2.	$2\angle BCD$ = अधिक कोण $\angle BOD$ (x)	2.	एउटै चाप $\widehat{\mathbf{BAD}}$ मा आधारित परिधिको कोण र केन्द्रीय कोणको सम्बन्ध
3.	$2\angle BAD+2\angle BCD = \angle BCD(y)+\angle BOD(x)$	3.	तथ्य नं. (1) र (2) जोड्दा
4.	$2(\angle BAD+\angle BCD) = 360^0$	4.	तथ्य नं. (3) बाट ($x+y=360^0$ परिक्रमा कोण भएकोले)
5.	$\angle BAD+\angle BCD = 180^0$	5.	तथ्य नं. (4) बाट (बराबरी भाग तथ्य)
6.	$\angle ABC+\angle ADC = 180^0$	6.	चतुर्भुजका भित्री कोणहरूको योगफल 360^0 हुने भएकाले ।

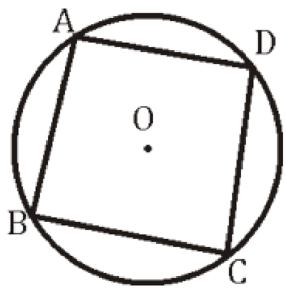
प्रमाणित भयो ।

अर्को तरिका

थाहा दिएको : ⊙ ABCD मा

(i) केन्द्रविन्दु O छ ।

(ii) चक्रीय चतुर्भुज ABCD छ ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने : (i) $\angle BAD + \angle BCD = 180^0$

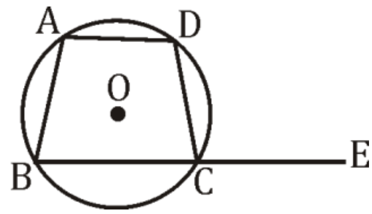
(ii) $\angle ABC + \angle ADC = 180^0$

प्रमाण :

	तथ्यहरू		कारणहरू
1.	$2\angle BAD \cong \widehat{BCD}$ (चाप)	1.	परिधिको कोण र सम्मुख चापको सम्बन्ध
2.	$2\angle BCD = \widehat{BAD}$ (चाप)	2.	कारण (1) जस्तै
3.	$2(\angle BAD+\angle BCD) \cong (\widehat{BCD} + \widehat{BAD})$	3.	तथ्य नं. (1) र (2) जोड्दा
4.	$2(\angle BAD+\angle BCD) =$ परिधि (ABCD)	4.	$\widehat{BCD} + \widehat{BAD} =$ पुरा परिधि हुनाले
5.	$2(\angle BAD+\angle BCD) = 360^0$	5.	पूरा परिध $= 360^0$ हुनाले
6.	$\angle BAD+\angle BCD = 180^0$	6.	तथ्या नं. 4 बाट (बराबरी भाग तथ्य)
7.	$\angle ABC=\angle ADC$	7.	माथि जस्तै (O र A तथा O र C जोड्दा)

प्रमाणित भयो ।

साध्य 9 को उपसाध्य



1. चक्रीय चतुर्भुजको एउटा भुजालाई बढाउँदा बन्ने बाहिरी कोण आसन्न कोणको सम्मुख कोणसँग बराबर हुन्छ ।

थाहा दिएको : ⊙ ABCD मा

(i) केन्द्रविन्दु O छ ।

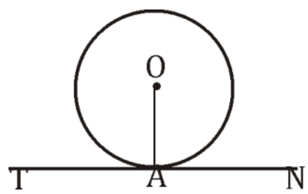
(ii) चक्रीय चतुर्भुज ABCD को भुजा BC लाई E सम्म बढाइएको छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : (i) $\angle DCE = \angle BAD$

प्रमाण :

	तथ्यहरू		कारणहरू
1.	$\angle BAC+\angle BCD = 180^0$	1.	चक्रीय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू परिपूरक हुनाले
2.	$\angle BCD+\angle DCE = 180^0$	2.	सरल रेखामा बनेका आसन्न कोणहरूको योगफल
3.	$\angle BAC=\angle DCE$	3.	तथ्या नं. (1) र (2) बाट ।

प्रमाणित भयो ।



४(ख) **स्पर्श रेखा सम्बन्धी साध्य**

(१) वृत्तको अर्धव्यास स्पर्श रेखासँग लम्ब हुन्छ । चित्रमा TN स्पर्श

रेखा हो । $OA \perp TN$ छ । जहाँ O वृत्तको व्यास हो ।

४(ग) अति छोटो उत्तर आउने (ज्ञान सम्बन्धी) प्रश्नहरू

उदाहरण 1 :

एउटै चापमा आधारित परिधिको कोण र केन्द्रीय कोणहरूको सम्बन्ध के हुन्छ ?

समाधान :

एउटै चापमा आधारित परिधि कोण बिचको केन्द्रीय कोणको आधा हुन्छ ।

अभ्यास : 1

1. (क) एउटै चापमा आधारित परिधिका कोणहरू सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।

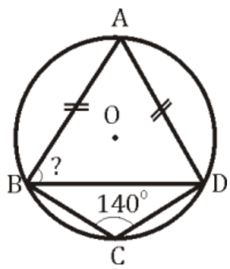
(ख) चक्रीय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरूको योगफला कति हुन्छ ?

(ग) वृत्तको एउटै चापमा आधारित परिधिका कोणबिचको सम्बन्ध छ ?

४(घ) छोटो उत्तर आउने (वोध सम्बन्धी) प्रश्नहरू

उदाहरण : 2

चित्रमा $AB = AD$ र $\angle BCD = 140^0$ भए $\angle ABD$ को नाप कति हुन्छ ?



समाधान :

यहाँ, $AB = AD$

$\angle BCD = 140^0$

$\angle ABD = ?$

अब, चक्रीय चतुर्भुज ABCD मा, $\angle A + \angle C = 180^0$ [$\therefore$ चक्रीय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरूको योगफल 180^0 हुने हुनाले]

अथवा, $\angle A + 140^0 = 180^0$

अथवा, $\angle A = 180^0 - 140^0$

$\therefore \angle A = 40^0$

फेरि, ΔABD मा

$\angle A + \angle ABD + \angle ADB = 180^0$ [त्रिभुजको भित्री कोणहरूको योगफल]

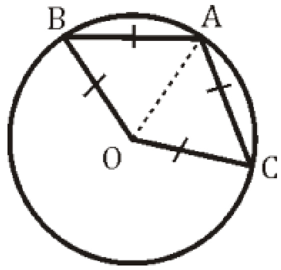
अथवा, $40^0 + \angle ABD + \angle ABD = 180^0$ [$\therefore \angle ABD = \angle ADB$ हुनाले]

अथवा, $2\angle ABD = 180^0 - 40^0$

अथवा, $\angle ABD = \frac{140^\circ}{2}$

$\therefore \angle ABD = 70^0$

उदाहरण : 3



दिइएको चित्रमा O वृत्तको केन्द्रविन्दु हो । यदि ABOC एउटा समवाहु चतुर्भुज हो भने $\angle BAC$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, $OA = OC = OB$ [$\therefore$ एउटै वृत्तका अर्धव्यास हुनाले]

अब, $\angle OAC = \angle OCA = \angle AOC = 60^0$ [$\because OA = OC = AC$ भएकोले]

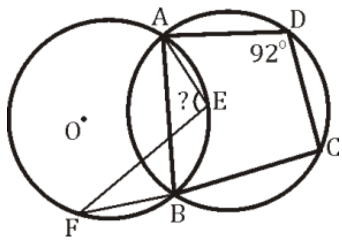
फेरि, $\angle ABO = \angle BAO = \angle BOA = 60^0$ [$\because OA = AB = OB$ भएकोले]

फेरि, $\angle BAC = \angle BAO + \angle CAO$ [$\because$ सिङ्गो टुक्रे तथ्य]

अथवा, $\angle BAC = 60^0 + 60^0$

$\therefore \angle BAC = 120^0$

उदाहरण : 4



दिइएको चित्रमा दुईओटा वृत्तहरूका विन्दुहरू A र B मा प्रतिच्छेदन भएका छन् र CBF एउटा सिधा रेखा हो । यदि $\angle ADC = 92^0$ भए $\angle AEF$ को नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, $\angle ABF = \angle ADC$ [$\because$ चक्रीय चतुर्भुज ABCD को भुजा BC लाई बढाउँदा बन्ने बाहिरी कोण]

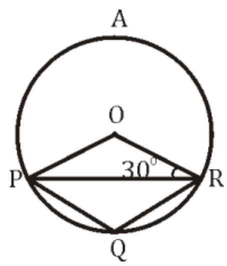
अथवा, $\angle ABF = 92^0$

फेरि, $\angle ABF = \angle AEF$ [$\because$ एउटै चाप AF मा आधारित परिधिका कोणहरू]

अथवा, $92^0 = \angle AEF$

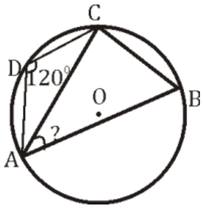
$\because \angle AEF = 92^0$

अभ्यास 5.2. (छोटो उत्तर आउने (वोध सम्बन्धी) प्रश्नहरू)

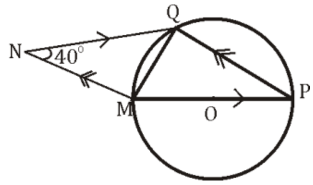


(क) चित्रमा वृत्तको केन्द्र विन्दु O छ । यदि $\angle PRO = 30^0$ भए $\angle PQR$ कति हुन्छ ? (उत्तर : 120^0)

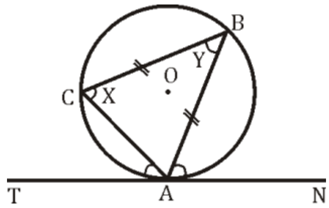
(ख) दिइएको चित्रमा O वृत्तका केन्द्र हो । यदि $\angle ADC = 120^0$ भए $\angle BAC$ को नाप कति हुन्छ ? (उत्तर: 30^0)



(ग) चित्रमा MNQP एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो । MP व्यास हो । यदि $\angle MNQ = 40^0$ भए $\angle QMO$ को नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

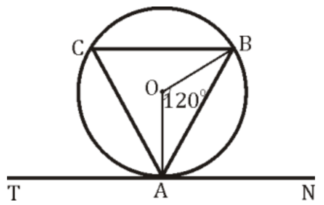


(घ) दिइएको चित्रमा विन्दु A मा TAN स्पर्श रेखा हो । यदि AB=BC र $\angle CAT = 40^0$ भए Y को मान पत्ता लगाउनुहो । (उत्तर: $x = 70^0$ र $y = 40^0$)



(ङ) चित्रमा TAN स्पर्श रेखा र O वृत्तको केन्द्र विन्दु हो । यदि $\angle BOA = 120^0$ भए $\angle BAT$ को नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

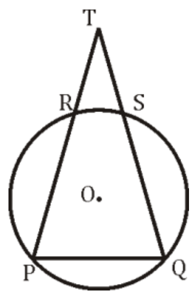
(उत्तर : 120^0)



(ङ) लामो उत्तर आउने प्रश्नहरू

उदाहरण : 6

समाद्विबाहु ΔPQT मा TP = TQ छ । यदि P र Q भएर गएको एउटा वृत्तले TP र TQ लाई क्रमशः विन्दु R र S मा काटेको छ । सिद्ध गर्नुहोस् : PQ // RS



समाधान :

थहा दिएको : ΔPQT मा (i) TP = TQ छ ।

(ii) TP र TQ ले वृत्तको परिधिमा क्रमशः R र S मा काटेको छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : PQ // RS

प्रमाण :

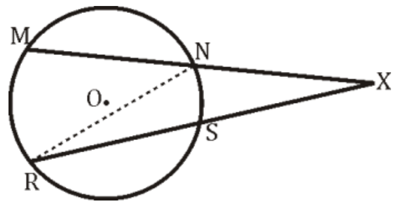
	तथ्यहरू		**कारणहरू**
1.	TP = TQ	1.	थाहा दिएको

2.	$\angle TPQ = \angle TQP$	2.	तथ्य नं. (1) बाट (समाद्विवाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू)
3.	$\angle TPQ = \angle RST$	3.	चक्रीय चतुर्भुजको एउटा भुजालाई बढाउँदा बन्ने बाहिरी कोण आसन्न कोणको सम्मुख चापसँग बराबर हुने हुनाले
4.	$\angle TQP = \angle RST$	4.	तथ्य नं. (2) र (3) बाट
5.	$PQ // RS$	5.	तथ्य नं. (4) बाट (सङ्गतकोण बराबर भएकोले

प्रमाणित भयो ।

उदाहरण : 7

दिइएको चित्रमा वृत्तका जीवाहरू MN र RS वाह्य विन्दु X मा काटिएका छन् भने, सिद्ध गर्नुहोस् : $\angle MXR = \frac{1}{2}(\widehat{MR} - \widehat{NS})$



समाधान :

थाहा दिएको : ⊙ MRSN मा केन्द्र विन्दु O छ । जीवा MN र जीवा RS बाहिरी विन्दु X मा काटिएका छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle MXR = \frac{1}{2}(\widehat{MR} - \widehat{NS})$

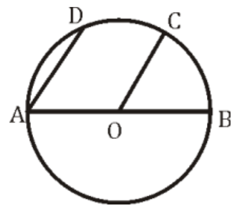
जुक्ति : M र R जोडौं ।

प्रमाण :

	तथ्यहरू		**कारणहरू**
1.	$\angle MNR = \angle NRS + \angle NXS$ अथवा $\angle NXS = \angle MNR - \angle NRS$	1.	त्रिभुजको एउटा भुजालाई बढाउँदा बन्ने बाहिरीकोण अनासन्न दुई भित्री कोणहरूको योगफलसँग बराबर हुनाले
2.	$\angle MNR \cong \frac{1}{2}\widehat{MR}$ (चाप)	2.	परिधिको कोण र सम्मुख चापको सम्बन्ध
3.	$\angle NRS = \frac{1}{2}\widehat{NS}$ (चाप)	3.	कारण (2) जस्तै
4.	$\angle NXS = \frac{1}{2}\widehat{MR} - \frac{1}{2}\widehat{NS}$	4.	तथ्या नं. (1), (2) र (3) बाट
5.	$\angle MXR = \frac{1}{2}(\widehat{MR} - \widehat{NS})$	5.	तथ्य नं. (4) बाट

प्रमाणित भयो ।

उदाहरण : 8



दिइएको चित्रमा O वृत्तको केन्द्रविन्दु AB व्यास र $\widehat{BC} = \widehat{CD}$ भए,

सिद्ध गर्नुहोस् : AD//OC

समाधान :

थाहा दिएको : ABCD मा केन्द्रविन्दु O छ । AB व्यास हो । $\widehat{BC} = \widehat{CD}$ छ ।

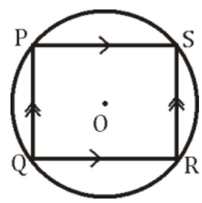
सिद्ध गर्नुपर्ने : AD//OC

प्रमाण :

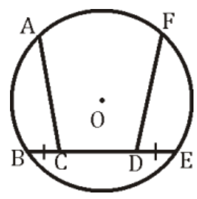
	तथ्यहरू		**कारणहरू**
1.	$\widehat{BC} = \widehat{CD}$	1.	थाहा दिएको
2.	$\widehat{BC} = \frac{1}{2}\widehat{BD}$	2.	तथ्य नं. (1) बाट ($\widehat{BD}$ को मध्यविन्दु C हुनाले)
3.	$\angle BOC = \widehat{BC}$	3.	केन्द्रीय कोण र सम्मुख चापको सम्बन्ध
4.	$\angle BAD = \frac{1}{2}\widehat{BD}$	4.	परिधिको कोण र सम्मुख चापको सम्बन्ध
5.	$\angle BOC = \angle BAD$	5.	तथ्य नं. (2) (3) र (4) बाट
6.	AD//OC	6.	तथ्या नं. (5) बाट (सङ्गत कोणहरू बराबर भएकोले)

प्रमाणित भयो ।

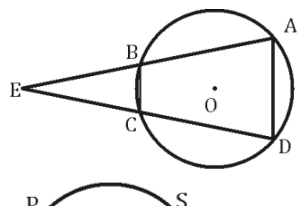
अभ्यास 5.3. लामो उत्तर आउने (प्रयोग सम्बन्धी) प्रश्नहरू



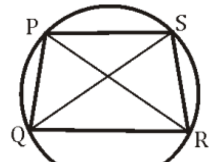
(क) सँगैको चित्रमा PQRS एउटा चक्रीय समानान्तर चतुर्भुज हो भने PQRS आयत हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



(ख) सँगैको चित्रमा यदि BC = DE र $\widehat{AB} = \widehat{FE}$ भए $\angle ACB = \angle FDE$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



(ग) चक्रीय चतुर्भुज ABCD को भुजाहरू AB र DC लाई बढाउँदा विन्दु E मा काटिएका छन् । यदि $\angle DAB = \angle CBA$ भए CF = BE हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

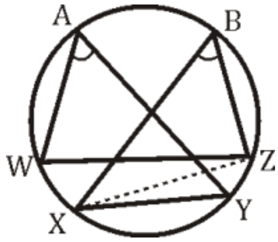


(घ) दिइएको चित्रमा, यदि PR = QS भए प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(i) PQ = SR (ii) PS//QR

अभ्यास 5.4. लामो उत्तर आउने प्रश्नहरू

उदाहरण : 9



दिइएको चित्रमा $\angle WAY = \angle XBZ$ छ भने $WZ // XY$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान :

थाहा दिएको : $\angle WAY = \angle XBZ$

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $WZ//XY$

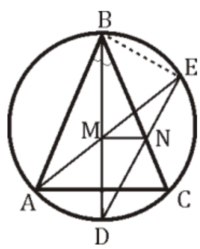
जुक्ति : X र Z जोडौँ ।

प्रमाण :

	तथ्यहरू		**कारणहरू**
1.	$\angle WAY = \angle XBZ$	1.	थाहा दिएको
2.	$\angle WAY = \frac{1}{2}\widehat{WXY}$ (चाप)	2.	परिधि कोण र सम्मुख चापको सम्बन्ध
3.	$\angle XBZ = \frac{1}{2}\widehat{XYZ}$ (चाप)	3.	कारण (2) जस्तै
4.	$\widehat{WXY} = \widehat{XYZ}$	4.	तथ्य नं. (1), (2) र (3) बाट
5.	$\widehat{WXY} - \widehat{XY} = \widehat{XYZ} - \widehat{XY}$	5.	तथ्य नं. (4) बाट (बराबरी घटाऊ तथ्य)
6.	$\widehat{WX} = \widehat{YZ}$	6.	तथ्या नं. (5) बाट (शेष तथ्य)
7.	$\angle WZX = \frac{1}{2}\widehat{WX}$	7.	परिधिको कोण र सम्मुख चापको सम्बन्ध
8.	$\angle WZX = \frac{1}{2}\widehat{YZ}$	8.	कारण नं. (2) जस्तै
9.	$\angle WAY = \angle ZXY$	9.	तथ्या नं. (6), (7) र (8) बाट
10.	$XY \parallel WZ$	10.	एकान्तर कोण बराबर भएकोले [तथ्य नं. (9) बाट]

प्रमाणित भयो ।

उदाहरण : 10



दिइएको चित्रमा $\angle ABC$ को अर्धक BD छ । BD र BC लाई AE र DE ले M र N मा प्रतिच्छेदित गरेको छ । सिद्ध गर्नुहोस् : $MN \parallel AC$

समाधान :

थाहा दिएको : (i) $\angle ABC$ को अर्धक BD छ ।

(ii) AE र BD विन्दु M र BC र DE विन्दु N मा प्रतिच्छेदित भएका छन् ।

(iii) M र N तथा A र C जोडिएको छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : KN // AC

जुक्ति : B र E जोडौँ ।

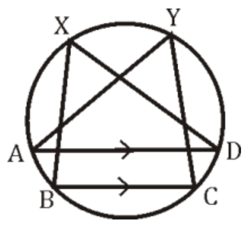
प्रमाण :

	तथ्यहरू		**कारणहरू**
1.	$\angle ABD = \angle CBD$	1.	थाहा दिएको ($\angle ABC$ को अर्धक BD भएकोले)
2.	$\angle ABD = \angle AED$	2.	एउटै चापमा आधारित परिधिका कोणहरू
3.	$\angle CBD = \angle AED$	3.	तथ्य नं. (1) र (2) बाट
4.	$\therefore$ BMNE चक्रीय विन्दुहरू हुन्	4.	तथ्य नं. (3) बाट (एउटै आधार MN मा आधारित परिधिका कोणहरू बराबर हुनाले)
5.	$\angle EBN = \angle EMN$	5.	एउटै चाप EN मा आधारित परिधिका कोणहरू हुनाले
6.	$\angle EBN = \angle EAC$	6.	एउटै चाप EC मा आधारित परिधिका कोणहरू भएकोले
7.	$\angle EMN = \angle EAC$	7.	तथ्या नं. (5) र (6) बाट
8.	MN//AC	8.	तथ्या नं. (7) बाट [सङ्गत कोणहरू बराबर हुनाले]

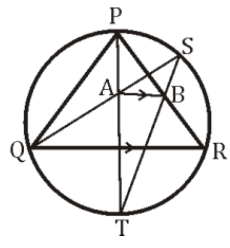
प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 5.5. लामो उत्तर आउने (उच्च दक्षता) सम्बन्धी प्रश्नहरू

(क) दिइएको चित्रमा AD//BC छ भने $\angle AYC = \angle BXD$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



(ख) दिइएको चित्रमा AB//QR छ भने $\angle QPR$ को अर्धक PT हुन्छ भनी सिद्ध गर्नुहोस् ।



6. पृष्ठपोषण

6.1. ज्ञान सम्बन्धी प्रश्नहरूको (अति छोटो उत्तर आउने)

(क) एउटै चापमा आधारित परिधिका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

(ख) चक्रीय चतुर्भुजको सम्मुख कोणहरूको योगफल 180^0 वा दुई समकोण हुन्छ ।

6.2. वोध सम्बन्धी प्रश्नहरूको (छोटो उत्तर आउने)

(क) वृहत् कोण $\angle POR$ को नाप निकाल्ने । परिधिको कोण केन्द्रीय कोणको आधा हुने सम्बन्ध प्रयोग गरी $\angle PQR$ को नाप निकाल्न सकिन्छ ।

(ख) चक्रीय चतुर्भुजको सम्मुख कोणहरूको सम्बन्ध प्रयोग गरी $\angle B$ को नाप निकाल्ने । ΔABC मा $\angle ACB$ समकोण हुने र त्रिभुजको भित्री कोणहरूको योगफलको सम्बन्ध प्रयोग गरी $\angle BAC$ को नाप निकाल्ने ।

(ग) समानान्तर चतुर्भुजको सम्मुख कोणहरूको सम्बन्ध प्रयोग गरी $\angle P$ को नाप निकाल्ने । त्रिभुज PQM मा $\angle MQP$ समकोण हुने भएकोले त्रिभुजको भित्री कोणहरूको येगफलको सम्बन्धबाट $\angle QMO$ को नाप पत्ता लगाउने ।

(घ) $\angle CAT$ र $\angle ABC$ लाई एकान्तर वृत्त खण्डको सम्बन्ध प्रयोग गरी y को नाप पत्ता लगाउने । $AB = AC$ भएकोले $\angle ACB = \angle BAC$ को सम्बन्ध प्रयोग गरी त्रिभुजको भित्री कोणहरूको योगफल सम्बन्ध प्रयोग गरी x को मान निकाल्न सकिन्छ ।

(ङ) $\angle BOC$ र $\angle BAC$ लाई एउटै चापमा आधारित केन्द्रीय कोण र एकान्तर कोणको सम्बन्ध प्रयोग गर्ने । $\angle BAC$ र $\angle BCY$ लाई एकान्तर वृत्तखण्डको कोणको सम्बन्ध प्रयोग गर्ने । $\angle BCY$ र $\angle BCX$ लाई सरल रेखामा बनेका आसन्न कोणहरूको योगफलको सम्बन्ध प्रयोग गरी $\angle BCX$ को नाप निकाल्न सकिन्छ ।

6.3. लामो उत्तर आउने प्रयोग सम्बन्धी प्रश्नको

(क) $\angle QPR$ र $\angle QRS$ मा चक्रीय चतुर्भुजको सम्मुख कोणहरूको योगफलको सम्बन्ध प्रयोग गर्ने । $\angle QPR$ र $\angle QRS$ लाई समानन्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुने सम्बन्ध प्रयोग गरी $\angle QPR$ वा $\angle QRS$ लाई समकोण देखाई PQRS आयत हो भनी प्रमाणित गर्न सकिन्छ ।

(ख) A र B तथा E र F जोड्ने । $\widehat{AB} = \widehat{FE}$ चापमा $\widehat{AF}$ जोडेर $\angle ABC = \angle FED$ देखाइ ΔABC र ΔDEF लाई भु.को.भु. तथ्य लगाई अनुरूप गर्ने । अनि सङ्गति कोणहरू बराबर देखाउने ।

(ग) $\angle EBC$ र $\angle DAB$ लाई थाहा दिएको भए बराबर देखाउने $\angle EBC$ र $\angle ADC$ लाई चक्रीय चतुर्भुजको एउटा भुजालाई बढाउँदा बन्ने बाहिरी कोण र त्यसको आसन्न

कोणको सम्मुख कोणको सम्बन्ध प्रयोग गर्ने । $\angle BAD = \angle ACD$ देखाई $AE = DE$ प्रमाणित गर्न सकिन्छ ।

(घ) PR जीवा = QS जीवा ले काटेका चापहरू पनि बराबर हुन्छ भन्ने सम्बन्ध प्रयोग गर्ने । बराबर चापमा साझा चाप घटाउने र बाँकी चापहरू $\widehat{PQ}$ र $\widehat{SR}$ पनि बराबर हुन्छन् भन्ने सम्बन्ध प्रयोग गर्ने । बराबर चापमा बनेका जीवाहरू बराबर हुन्छन् भन्ने सम्बन्धको प्रयोग गरी $PQ = SR$ देखाउने । बराबर चापमा बनेका परिधिका कोणहरू बराबर हुन्छ भन्ने सम्बन्ध प्रयोग गरी एकान्तर कोणबाट PS // QR प्रमाणित गर्न सकिन्छ ।

6.4. **लामो उत्तर आउने (उच्च दक्षता सम्बन्धी) प्रश्नको**

(क) B र D जोड्ने । $\angle ADB$ र $\angle DBC$ का सम्मुख चापहरूको सम्बन्ध प्रयोग गर्ने । $\widehat{AB}$ र $\widehat{CD}$ मा साझा चाप $\widehat{BC}$ जोडेर परिधिको कोण र सम्मुख चापको सम्बन्ध प्रयोग गरी $\angle AYC = \angle BXD$ प्रमाणित गर्न सकिन्छ ।

(ख) P र S जोडी A, P, S, र B लाई चक्रिय विन्दुहरू देखाई $\angle APB = \angle ASB$, $\angle QPT$ ($\angle ASB$) देखाई $\angle QPT = \angle RPT$ देखाउनुहोस् । उदाहरण 10 पनि हेर्नुहोस् ।

7. **सारांश**

यस पाठको अध्ययनका क्रममा निम्न बुँदाहरू प्रमुख विषयको रूपमा अध्ययन गरिएको छ ।

(क) बराबर जीवाहरूले काटेका चापहरू बराबर हुन्छन् ।

(ख) बराबर चाप बनाउने जीवाहरू बराबर हुन्छन् ।

(ग) एउटै चापमा आधारित केन्द्रीय कोण परिधिको कोणको दोब्बर हुन्छ ।

(घ) एउटै चापमा आधारित परिधिका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

(ङ) चक्रीय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू परिपूरक हुन्छन् ।

(च) व्यासमा आधारित परिधिको कोण एक समकोण हुन्छ ।

(छ) चक्रीय चतुर्भुजको एउटा भुजालाई बढाउँदा बन्ने बाहिरी कोण आसन्न कोणको सम्मुख कोणसँग बराबर हुन्छ ।

(ज) केन्द्र विन्दुबाट स्पर्श विन्दु जोड्ने अर्धव्यास स्पर्श रेखामा लम्ब हुन्छ ।

एकाइ : 16

त्रिकोण मिति (Trigonometry)

1. **परिचय :**

"त्रिकोणमिति" को शाब्दिक अर्थ "तीनकोणहरूको नाप" हो । अतः यसलाई त्रिभुजको नाप भनेर बुझ्ने गरिन्छ । यसमा त्रिभुजका तीनकोणहरू र तीन भुजाहरूका सम्बन्धहरूको बारेमा अध्ययन गरिन्छ । त्रिकोणमितिलाई गणितको सबभन्दा व्यवहारिक अङ्ग मानिन्छ । यस एकाइमा त्रिभुजको क्षेत्रफलसम्बन्धी आवश्यक धारणा र सोसम्बन्धी समस्याहरू तथा उचाइ र दूरीसम्बन्धी साधारण समस्याहरू (एउटा मात्र त्रिभुज भएको) समेत समावेश गरिएको छ ।

2. **सिकाई उपलब्धि :**

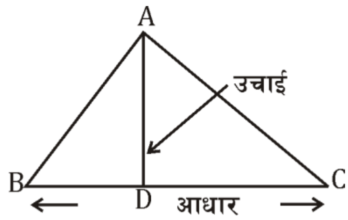
यस एकाइको अध्ययनपछि निम्नलिखित कार्य गर्न सक्षम हुनेछ :

- त्रिकोणमितीय सूत्र प्रयोग गरी त्रिभूज तथा चर्तुभुजको क्षेत्रफल निकाल्न,
- त्रिकोणमितीय अनुपातको प्रयोग गरी उचाई तथा दूरी सम्बन्धी साधारण समस्याहरू हल गर्न ।

A : त्रिभुज र चतुर्भुजको क्षेत्रफल

3. **आधारभूत विषय वस्तु :**

त्रिभुजको क्षेत्रफलमा त्रिकोणमितिको प्रयोग :



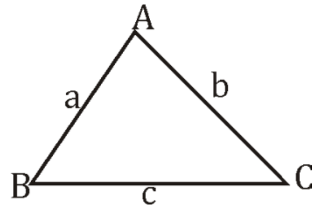
(क) सामान्यतया त्रिभुजको आधार र उचाई दिइएको अवस्थामा यसरी क्षेत्रफल निकालिन्छ। त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ उचाइ

यस्तै यहाँ त्रिभुजको क्षेत्रफल

$= \sqrt{s(s-a)\ (S-b)\ (s-c)}$

जस्मा, $s = \frac{a+b+c}{2}$ [∵ त्रिभुजको अर्ध परिमिति]

a, b र c त्रिभुजका भुजाहरू



4. **मुख्य विषय वस्तु**

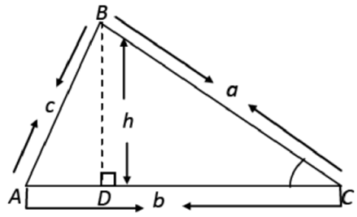
कुनै दुईओटा भुजाहरू र तिनका बिचको एउटा कोण थाहा दिइएको अवस्थामा त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्ने सुत्र निम्नानुसार निकाल्न सकिन्छ ।

थाहा दिइएको :

मानौं, ΔABC मा दुईओटा भुजाहरू BC र CA अर्थात् भुजा a र b तथा ति भुजाहरूले बनाउने

कोण BCA थाहा दिइएको छ ।

पत्ता लगाउनु पर्ने : ΔABC को क्षेत्रफल



रचना : शीर्षबिन्दु B बाट AC मा लम्ब BD खिचौं । ΔABC को उचाइ $BD = h$ मानौँ ।

अब, ΔBCD मा

$$\mathbf{Sin\ C} = \frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{BC}}$$

अथवा, $\quad \text{Sin C} = \frac{h}{a} \qquad \therefore h = a \text{ Sin C}$

अब, $\quad \Delta ABC$ को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ उचाइ

$$= \frac{1}{2} \times AC \times BD$$

$$= \frac{1}{2} \times b \times h$$

यहाँ, h को मान प्रतिस्थापन गर्दा,

ΔABC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\, b.\, a \text{ Sin C}$

$\therefore$ ABC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\, ab \sin C$

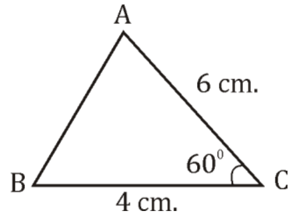
माथिको त्रिभुजमा $\angle C$ न्यूनकोण छ । तर त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्ने यो सूत्र त्रिभुजको कोण C अधिककोण भएको अवस्थामा पनि मान्य (Valid) हुन्छ । त्यसकारण दुईओटा भुजाहरू a र b को बीचको कोण C न्यूनकोण वा अधिककोण जुन भए पनि त्रिभूजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\, ab \sin C$ हुन्छ ।

यस्तै प्रकारले यदि ΔABC का दुईओटा भुजाहरू a र c को सँगै यी भुजाहरूले बनाएको कोण B थाहा दिइएको अवस्थामा Δ को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\, ac \sin B$ हुन्छ ।

$\therefore$ त्रिभुजका कुनै दुईओटा भुजाहरू र तीनका बीचको एउटा कोण थाहा दिइएको अवस्थामा त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्र निम्नअनुसार हुन्छन् ।

ΔABC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\, ab \sin C$ .... (i)
ΔABC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\, bc \sin A$ .... (ii)
ΔABC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\, ac \sin B$ .... (iii)

उदाहरण : 1



ΔABC का भुजाहरू a = 4 से.मि., b = 6 से.मि. र $\angle C = 60^0$ छन् भने त्यो त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् । [$\sin 60^0 = 0.86$]

हामीलाई थाहा छ,

ΔABC को क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times 4$ से.मि. $\times 6$ से.मि. $\times \sin 60^0$

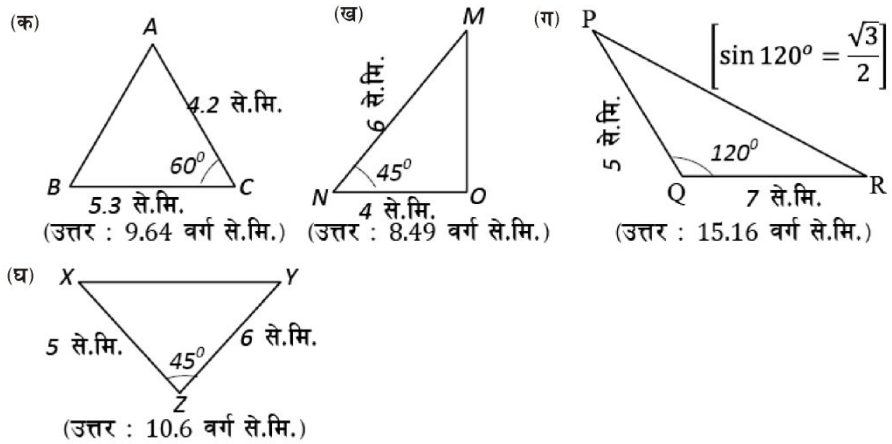
$= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times 0.86$ वर्ग से.मि.

$= 12 \times 0.86$ वर्ग से.मि.

$\therefore \Delta$ABC को क्षेत्रफल = 10.32 वर्ग से.मि. उत्तर ।

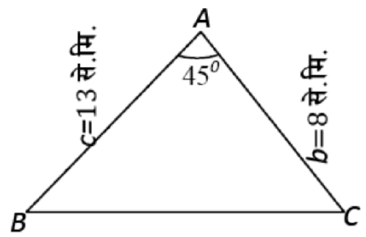
अभ्यास : 1

1. **तल दिइएका त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।**



उदाहरण : 2

ΔABC को क्षेत्रफल निकाल्नुहोस्, जसको भुजा b=8 से.मि. भुजा c=13 से.मि. र भुजा b र c ले बनाएको कोण A=45⁰ छ । [$\sin 45^0 = 0.71$]



हामीलाई थाहा छ,

ΔABC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\, bc\, \sin A$

$= \frac{1}{2}\ 8$ से.मि. $\times 13$ से.मि. $\times \sin 45^0$

$= 52 \times 0.71$ वर्ग से.मि.

$= 36.92$ वर्ग से.मि.

$\therefore$ ΔABC को क्षेत्रफल = 36.92 वर्ग से.मि. उत्तर ।

अभ्यास : 2

1. **निम्नलिखित अवस्थामा ΔABC को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।**

   (i) a=13 से.मि., b=10 से.मि., $\angle C=60^0$; [sin 60^0=0.86] [**उत्तर**: 55.9 व.से.मि.]

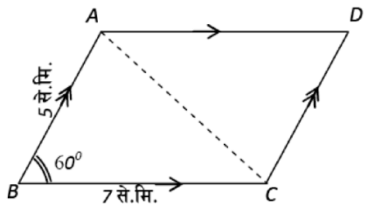
   (ii) b=2.7 से.मि., c=3 से.मि., $\angle A=90^0$; [sin 90^0= 1] [**उत्तर**: 4.05 व.से.मि.]

   (iii) c=8 से.मि., a=4.5 से.मि., $\angle B=30^0$; [sin 30^0=0.5] [**उत्तर**: 18 व.से.मि.]

   (iv) b=11 से.मि., c=7 से.मि., $\angle A=90^0$; [sin90^0= 1] [**उत्तर**: 38.5 व.से.मि.]

उदाहरण : 3

सँगैको चित्र ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो । यसमा दिइएको नापअनुसार यसको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।



यहाँ, समानान्तर चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल

$= 2 \times (\Delta ABC$ को क्षेत्रफल)

$=2 \times \frac{1}{2}$ ca Sin B

$= 2 \times \frac{1}{2} \times 7$ से.मि. $\times 5$ से.मि. $\times \sin 60^0$ [$\sin 60^0 = 0.86$]

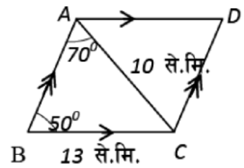
$= 35 \times 0.86$ वर्ग से.मि.

$\therefore$ स.च. ABCD को क्षेत्रफल = 30.1 वर्ग से.मि.

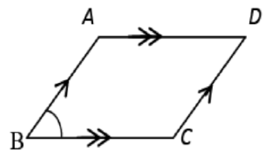
समानान्तर चतुर्भुजमा 2 वटा त्रिभूज हुन्छन् । चतुर्भुज क्षेत्रफल=2(ΔABC)

अभ्यास : 3

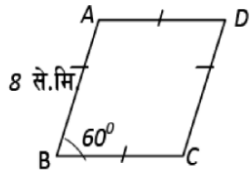
1. दिइएको समानान्तर चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् । $\left[\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$



2. दिइएको समानान्तर चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल 48 वर्ग से.मि. छ । यदि AB=8 से.मि. र BC=12 से.मि. भए $\angle ABC$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

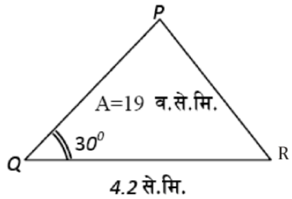


3. सँगैको समबाहु चतुर्भुज ABCD मा AB=8 से.मि. र $\angle ABC = 60^0$ छ भने यसको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् । साथै विकर्ण BD को लम्बाइ पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।



उदाहरण : 4

ΔPQR को क्षेत्रफल =19 वर्ग से.मि. छ । यसको भुजा QR=4.2 से.मि. र $\angle Q=30^0$ छन् भने भुजा PQ को नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।



[Sin $30^0=\frac{1}{2}$]

यहाँ दिइएको,

ΔPQR को क्षेत्रफल = 19 वर्ग से.मि. भुजा QR=4.2 से.मि. $\angle Q=30^0$

हामीलाई थाहा छ,

ΔPQR को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times PQ \times QR \times sinQ$

19 वर्ग से.मि. $= \frac{1}{2} \times PQ \times 4.2$ से.मि. $\sin 30^0$

अथवा, 19 वर्ग से.मि. $= \frac{1}{2} \times 4.2 \times \frac{1}{2}$. PQ से.मि. [$\therefore$ Sing$30^0 = \frac{1}{2}$]

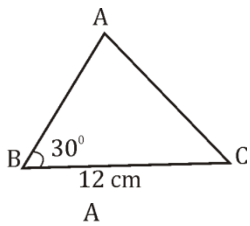
अथवा, 19 वर्ग से.मि. = 1.05 PQ से.मि.

or, PQ = $\frac{19 \text{ वर्ग से.मि.}}{1.05 \text{ से.मि.}}$

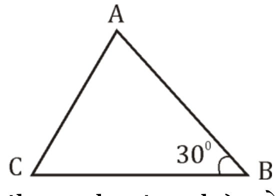
$\therefore$ PQ = 18.09 से.मि. उत्तर ।

अभ्यास : 4

1. दिइएको ΔABC मा, $\angle ABC = 30^0$, BC = 12 cm र ΔABC को क्षेत्रफल = 27 वर्ग से.मी. भए AB को नाप पत्ता लगाउनुहोस् । [**उत्तर**: 9 cm]



2. दिइएको चित्रमा BC = 20cm, $\angle ABC = 30^0$ र ΔABC को क्षेत्रफल = 75 cm^2 भए AB को लम्बाई पत्ता लगाउनुहोस् । [**उत्तर**: 15 cm]



3. प्रत्येक भुजाको लम्बाइ 10 से.मि. भएको समबाहु त्रिभुज (equilateral triangle) को क्षेत्रफल कति होला ? [**उत्तर** : 43 वर्ग से.मि.]

4. एउटा समबाहु त्रिभुजका दुई बराबर भुजाहरूको लम्बाइ 15 से.मि. छ र उक्त त्रिभुजको शीर्षकोण (vertical angle) 30^0 भए त्यस त्रिभुजको क्षेत्रफल कति होला ? [**उत्तर** : 56.25 वर्ग से.मि.]

उदाहरण 5 :

सँगैको चित्रमा AB = 10 से.मी. र ΔABC को क्षेत्रफल $25\sqrt{3}$ वर्ग से.मी. छन् । यदि AB = BC भए $\angle$ABC को मान निकाल्नुहोस् ।

यहाँ दिइएको,

AB = 10 से.मी.

ΔABC को क्षेत्रफल = $25\sqrt{3}$ वर्ग से.मी.

$\angle B = ?$

हामीलाई थाहा छ,

$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \text{Sin}B$

अथवा, $25\sqrt{3}$ वर्ग से.मी. = $\frac{1}{2} \times$ 10 से.मी. $\times$ 10 से.मी. $\times$ SinB

अथवा, $25\sqrt{3}$ वर्ग से.मी. = 50 वर्ग से.मी. $\times$ SinB

अथवा, $\text{Sin}B = \frac{25\sqrt{3} \text{ sq. cm.}}{50 \text{ sq. cm.}}$

अथवा, $\text{Sin}B = \frac{\sqrt{3}}{2}$

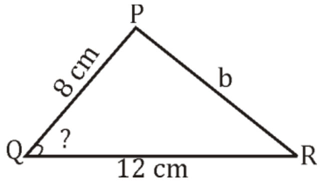
अथवा, $\text{Sin}B = \text{Sin}60^0$

$\therefore \angle B = 60^0$

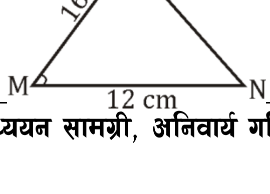
$\therefore \angle ABC = 60^0$

अभ्यास : 5 (**छोटो आउने बोधसम्बन्धी प्रश्नहरू**)

1. दिइएको त्रिभुज PQR को क्षेत्रफल 25 वर्ग से.मी. छ । यदि PQ = 8 से.मी. र QR = 12 से.मी. भए $\angle$PQR को मान पत्ता लगाउनु होस् । [**उत्तर** : $\angle PQR = 30^0$]



2. दिइएको चित्रमा PM = 16 से.मी., MN = 20 से.मी. र $\angle$PMN को क्षेत्रफल $80\sqrt{3}$ वर्ग से.मी. भए $\angle$PMN को नाप



पत्ता लगाउनुहोस् । [∴ **उत्तर** : $\angle PMN = 60^0$]

६. **पृष्ठपोषण**

तपाईँ माथि दिइएको अभ्यासमा समावेश गरिएका समस्याहरू हल गर्न निम्नलिखित कुराहरूको सहयोग लिन सक्नुहुनेछ :

- त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्दा प्रयोग हुने कोण थाहा दिइएका भुजाहरूका बीचमा परे/नपरेको राम्रोसँग विचार गर्नुपर्दछ । किनकी बीचमा कोण नपरेको भए त्यसलाई बीचमा पार्ने उपायहरूको खोजी गर्नुपर्दछ । पाइथागोरस साध्य प्रयोग गर्नुपर्ने भएमा वर्गमूल (square root) लिनु बिर्सनु हुँदैन ।
- समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल यसको एउटा त्रिभुजको क्षेत्रफलको दुईगुणा हुने हुँदा एउटा त्रिभुजको क्षेत्रफललाई 2 ले गुणा गर्नुपर्छ ।
- प्रश्न (ङ) मा समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरू बराबर र सम्मुख कोण बराबर हुन्छन् । त्यसैले BC=13 से.मि. हुन्छ । अब, ΔABC मा $\angle BCA$ को नाप निकाल्ने र यसको क्षेत्रफल निकाली त्यसलाई दोब्बर पार्ने ।
- प्रश्न (च) मा समानान्तर चतुर्भुजमा विकर्ण खिची दुईओटा त्रिभुज बनाउने र ΔABC बाट $\angle ABC$ को नाप निकाल्ने तर याद राख्नुहोस् समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफलको आधा त्यसबाट बनेको एउटा त्रिभुजको क्षेत्रफल हुन्छ ।
- प्रश्न नं. (ज) र (झ) लाई समाधाना गर्न उदाहरण (5) को सहयोग लिनुहोला ।

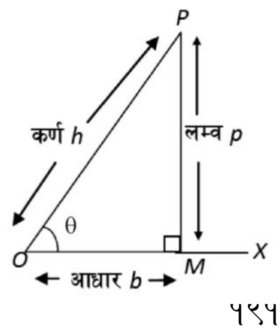
७. **सारांश**

- 2 वटा भूजाको मान तथा एउटा कोणको मान दिन सक्छ ।
- एउटा भूजा, त्रिभूजको क्षेत्रफल र कोणको मान दिएर अर्को भूजाको मान निकाल्न पर्ने हुन्छ ।
- 2 वटा भूजाहरू तथा त्रिभूजको क्षेत्रफल दिएर कोणको मान निकाल्न पर्ने पनि हुन्छ ।
- समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल, कोण तथा एउटा भूजाको मान थाहा दिएर अर्को एउटा भूजाको मान पत्ता लगाउनु पर्ने हुन्छ ।

B : उचाइ तथा दूरी

3. **आधारभूत विषय वस्तू :**

(क) **त्रिकोणमितिसम्बन्धी आधारभूत धारणा :**



दायाँको चित्रमा OX मा PM लम्ब छ र OP लाई जोडिएको छ । अब त्रिभुज OPM समकोण त्रिभुज हुन्छ । यसमा कोण θ लाई प्रसङ्गको कोण माने PM लम्ब (Perpendicular), OP कर्ण

(Hypoteneous) र OM आधार (Base) हुन्छ ।

अब, त्रिभुज OPM का दुई दुई भुजाहरूको सम्बन्ध देखाउँदा निम्नलिखित 6 ओटा अनुपातहरू हुन्छन्

$$\frac{MP}{OP}, \frac{OM}{OP}, \quad \frac{MP}{OM}, \quad \frac{OP}{MP}, \quad \frac{OP}{OM} \text{ र } \frac{OM}{MP}$$

यिनीहरूलाई θ को त्रिकोणमितीय अनुपात भन्दछन् । माथिको चित्रमा न्यूनकोण MOP = θ, लम्ब PM = p, आधार OM = b र कर्ण OP = h मानौं, अब

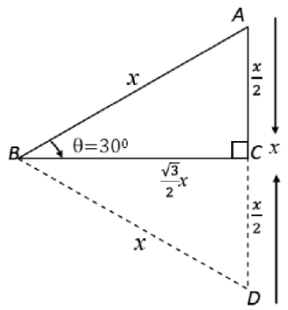
अनुपात $\frac{MP}{OP}$ अर्थात् $\frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$ लाई कोण θ को Sine भन्दछन् । यसलाई छोटकरीमा sinθ लेखिन्छ । अतः $\sin\theta = \frac{p}{h}$ हुन्छ ।

अनुपात $\frac{OM}{OP}$ अर्थात् $\frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$ लाई कोण θ को Cosine भन्दछन् । यसलाई छोटकरीमा cosθ लेखिन्छ । अथवा $\cos\theta = \frac{b}{h}$ हुन्छ ।

अनुपात $\frac{MP}{OM}$ अर्थात् $\frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$ लाई कोण θ को Tangent भन्दछन् । यसलाई छोटकरीमा tanθ लेखिन्छ । अतः $\tan\theta = \frac{p}{b}$ हुन्छ ।

नोट : त्रिकोणमितीय अनुपात न्यूनकोण तथा अधिककोण दुवैका लागि मान्य हुन्छ ।

सँगैको चित्रमा त्रिभुज ABC एउटा समकोण त्रिभुज हो, जसमा ∠BCA समकोण, BC आधार, AC लम्ब र AB कर्ण छन् ।



यहाँ, ∠B=θ=30⁰ हुँदा θ का 6 ओटा त्रिकोणमितीय अनुपात मध्ये तिनओटा निम्नलिखित हुन्छन् ।

$$\sin 30^o = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = \cos 30^o = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tan\,\theta = tan\,30^o = \frac{AC}{BC} = \frac{x \times 2}{2 \times \sqrt{3x}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

त्रिकोणमितीय अनुपात भिन्न वा दशमलवमा व्यक्त गरिएको हुन्छ । 0⁰ देखि 90⁰ सम्मका त्रिकोणमितीय अनुपात तालिका निम्नअनुसार छ-

कोण / त्रि.अनुपात	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

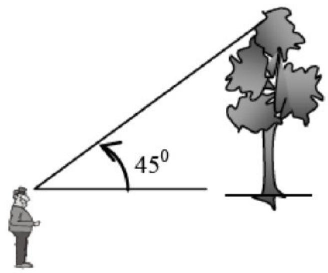
नोट: कोणको cosec, sec र cot को मान क्रमशः sin, cos र tan को व्युत्क्रम मान (Reciprocal value) हुन्छ । जस्तै sin 45^0 को मान $\frac{1}{\sqrt{2}}$ हुन्छ भने cosec 45^0 को मान $\sqrt{2}$ हुन्छ, त्यस्तै cos 30^0 को मान $\frac{\sqrt{3}}{2}$ हुन्छ भने sec 30^0 को मान $\frac{2}{\sqrt{3}}$ हुन्छ ।

4. **मूख्य विषयवस्तु** :

त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको प्रयोगबाट उचाइ तथा दूरीसम्बन्धी समस्याहरू समाधान गरिन्छ । कतिपय उचाइ तथा दूरीसम्बन्धी समस्याहरू वास्तविक नापबाट मात्र पत्ता लगाउन कठिनाइ पर्ने हन्छ । तर त्यही समस्यालाई समकोण त्रिभुज बनाई त्यसको एउटा भुजा र कोण मात्र नापेर बाँकी भुजाहरूको नाप सजिलै पत्ता लगाउन सकिन्छ । यस्तै तरिकाबाट उचाइ र दूरीसम्बन्धी समस्याहरू समाधान गर्ने तरिकाको बारेमा अध्ययन गर्ने छौं ।

1. **उन्नतांश कोण (Angle of Elevation) :**

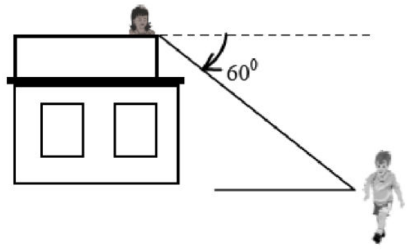
दायाँको चित्रमा एउटा विद्यार्थीले रुखको अगाडिबाट रुखको टुप्पो हेर्दा उसको आँखा र रुखको टुप्पो जोडेर बनेको दृष्टि रेखाले भुइँसँग समानान्तर हुने रेखासँग 45^0 को कोण बनाएको छ । यसरी बनेको कोणलाई उन्नतांश कोण भनिन्छ ।



जमिनमा बसी कुनै वस्तुलाई माथितिर हेर्दा दृष्टिरेखाले जमिन वा जमिनसँग समानान्तर रेखासँग बनाएको कोणलाई उन्नतांश कोण (Angle of elevation) भनिन्छ ।

2. **अवनति कोण (Angle of Depression) :**

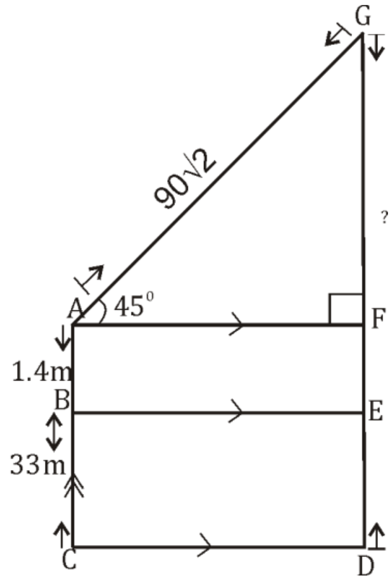
दायाँको चित्रमा एउटा विद्यार्थीले घरको छतबाट जमिनमा खेलिरहेको बालकलाई हेर्दा उसको आँखा र बालकलाई जोड्ने दृष्टिरेखाले क्षितिजसँग 60^0 को कोण बनाएको छ । यसरी बनेको कोणलाई अवनति कोण भनिन्छ ।



कुनै अग्लो स्थानबाट तलतिर रहेको कुनै वस्तुलाई हेर्दा दृष्टिरेखाले क्षितिज रेखासँग बनाएको कोणलाई अवनति कोण (Angle of depression) भनिन्छ ।

उदाहरण : 1

उचाइ 1.4 मि. भएको एउटा मानिसले 33 मि. अग्लो घरको छतबाट चङ्गा उडाइरहेको छ । यदि चङ्गाको धागोको लम्बाइ $\mathbf{90\sqrt{2}}$ मि. छ र यसले क्षितिजसँग 45^0 को कोण बनाउँदछ भने जमिनदेखि चङ्गासम्मको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान :

यहाँ, मानौं, घरको उचाइ (BC) = 33 मी.

मानिसको उचाई (AB) = 1.4 मी.

चङ्गाको धागोको लम्बाई $(AG) = 90\sqrt{2}$ मि.

चङ्गाले क्षितिजसँग बनाएको कोण $\angle GAF = 45^0$

जमीनदेखि चङ्गासम्मको उचाइ (DG) = ?

अब, समकोणी त्रिभुज GAF मा $\angle A$ लाई प्रसङ्ग कोण लिँदा,

$\text{Sin}A = \frac{FG}{AG}$ [$\therefore \text{Sin}\theta = \frac{p}{h}$ हुने भएकोले]

अथवा, $\text{Sin}45^0 = \frac{FG}{90\sqrt{2}\text{ m}}$

अथवा, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{FG}{90\sqrt{2}\text{ m}}$

$\therefore FG = 90\text{m}$

$\therefore$ जमीनदेखि चङ्गासम्मको उचाई (DG) $= FG + FE + DE$

$= 90\text{m} + 1.4\text{m} + 33\text{m}$

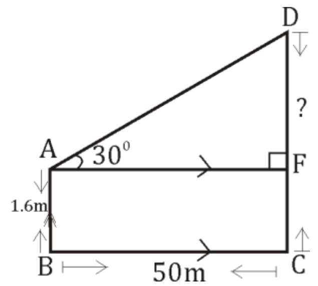
$= 124.4\text{m}$

अभ्यास : 1

1. उचाइ 1.3 मी. भएको एउटा केटाले 27 मी. अग्लो घरको छतबाट चङ्गा उडाइरहेको छ । यदि चङ्गाको धागोको लम्बाई $76\sqrt{3}$ मी छ र यसले क्षितिजसँग 60^0 को कोण बनाउँछ भने जमीनको सतहदेखि चङ्गासम्मको उचाइ पत्ता लगाउनु होस् । [उत्तर : 142.3m]
2. उचाइ 2 मी. भएको एउटा मानिसले 32 मी. अग्लो घरको घरको छतबाट चङ्गा उडाइरहेको छ । यदि चङ्गाको धागोको लम्बाइ $120\sqrt{2}$ मी. छ र यसले क्षितिजसँग 45^0 को कोण बनाउँछ भने जमिनको सतहदेखि चङ्गासम्मको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् । [154m]

उदाहरण : 2

1.6 मी. अग्लो मानिसले जमिनको सतहमा उभिएर 50 मी. परको एउटा रुखको टुप्पो हेर्दा उन्नतांश कोण 30^0 पाइयो भने रुखको उचाई कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान :

यहाँ, मानौं मानिसको उचाइ (AB) = 1.6m

मानिसदेखि रुखसम्मको दूरी (BC) = 50m

रुखको टुप्पो हेर्दा बन्ने उन्नतांश कोण ($\angle DAF = 30^0$)

रुखको उचाइ (CD) = ?

अब,

समकोणी त्रिभुज DAE मा $\angle A$ लाई प्रसङ्गकोण लिँदा

$\tan A = \frac{DE}{AE}$ [$\therefore \tan\theta = \frac{p}{b}$ हुने भएकोले]

अथवा, $\tan 30^0 = \frac{DE}{50m}$

अथवा, $\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}} = \frac{DE}{50m}$

अथवा, $\sqrt{3}DE = 50m$

अथवा, $DE = \frac{50m}{\sqrt{3}}$

$\therefore DE = 28.87m$

$\therefore$ रुखको उचाइ (CD) $= DE + EC$

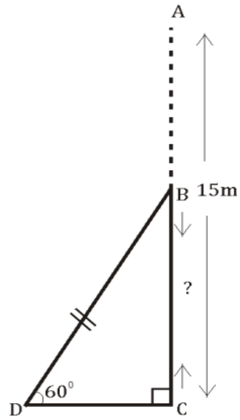
$= 28.87m + 16m$

$= 30.47m$

अभ्यास : 2

1. 120 मी. अग्लो धरहराको टुप्पोमा फेददेखि 100 मी. परबाट उभिएर हेर्दा अन्तरङ्ग कोण 45^0 पाउँछ भने मानिसको उचाइ कति होला ? [उत्तर : 2m]
2. 1.54 मी. अग्लो एउटी केटी 53.5 मी. उचाइको एउटा धरहराबाट 30 मी. पर उभिएको छिन् भने उनको आँखाबाट धरहराको टुप्पोको उन्नताङ्श कोण पत्ता लगाउनु होस् । ($\tan 60^0 = 1.737$) [उत्तर : 60^0]
3. 1.6 मी. अग्लो मानिसले एउटा स्तम्भको टुप्पोमा हेर्दा 45^0 को उन्नताङ्श कोण पाउँछ । यदि स्तम्भको उचाइ 21 मी. छ भने मानिस 2 स्तम्भको बिचको दूरी निकाल्नुहोस् ।[उत्तर : 30.37m]

उदाहरण 3 :



1. 14 मी. अग्लो रुख हावाले भाँचिएर रुखको टुप्पाले जमिनको सतहसँग 60^0 को कोण बनाउँछ भने उक्त रुख कति उचाइमा भाँचिएको रहेछ ।

समाधान :

यहाँ, मानौं, रुखको पूरा उचाई $(AC) = 15m$

भाँचिएको रुखको उचाइ $(BC) = ?$

रुखको टुप्पोले जमिनसँग बनाएको कोण $\angle BDC = 60^0$

अब, समकोणी त्रिभुज BCD मा $\angle D$ लाई प्रसङ्गकोण लिँदा

$\tan D = \frac{BC}{BD}$ [$\therefore \tan\theta = \frac{p}{b}$ हुने भएकोले]

अथवा, $\tan 60^0 = \frac{BC}{AB}$ [$\therefore AB = BD$ हुने भएकोले]

अथवा, $\sqrt{3} = \frac{BC}{AD-BC}$ [$\therefore AC = AB + BC$ हुने भएकोले]

अथवा, $\sqrt{3} = \frac{BC}{15-BC}$

अथवा, $BC = 15\sqrt{3} - \sqrt{3}\,BC$

अथवा, $BC + \sqrt{3}\,BC = 15\sqrt{3}$

अथवा, $4.73BC = 15\sqrt{3}$

अथवा, $BC = \frac{15\sqrt{3}}{4.73}$

$\therefore BC = 5.49m$

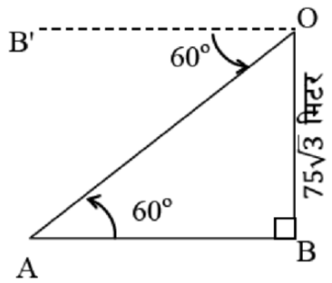
$\therefore$ भाँचिएको रुखको लम्बाई $= 5.49m$

अभ्यास : 3

1. एउटा 14 मी. अग्लो रुख हावाले भाँचिएर यसको टुप्पोले जमिनमा छुँदा जमिनसँग 60^0 को कोण बनेको छ । रुखको भाँचिएको भागको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. एउटा रुख हावाले भाँचिएको छ । भाँचिएको माथिल्लो भागले जमिनसँग 30^0 को कोण बनाउँछ र रुखको जरादेखि 7.5 मी. पर जमिनलाई टुप्पोले हुन्छ भने भाँचिनु भन्दा पहिलो रुखको उचाइ कति थियो ?

उदाहरण : 4

$75\sqrt{3}$ मिटर अग्लो धरहराबाट कुनै रुखको फेद हेर्दा अवनति कोण 60^0 छ भने त्यो रुख धरहराको फेदबाट कति पर होला ?



दायाँको चित्रमा OB धरहराको उचाइ, OB' क्षितिज रेखा र O अवलोकन बिन्दु हो । त्यस्तै A रुखको फेद र AB धरहराबाट रुखको फेदसम्मको दूरी हो ।

यहाँ,

$\angle B'OA = \angle BAO = 60^o$

$OB = 75\sqrt{3}$ मिटर

$AB = ?$

अब, समकोण त्रिभुज OBA बाट

$$\tan A = \frac{OB}{AB}$$

or, $AB = \frac{OB}{\tan A}$

or, $AB = \frac{75\sqrt{3}}{\tan 60^o} = \frac{75\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 75$ मिटर

$\therefore$ धरहराको फेदबाट रुखको फेदसम्मको दूरी $= 75$ मिटर ।

अभ्यास : 4

1. 160 मी. अग्लो कुनै टाकुराको टुप्पोबाट जमिनको सतहमा रहेको एउटा ढुङ्गा हेर्दा अवलोकन कर्ताले अवनति कोण 90^0 पाएछ भने उक्त टाकुराको फेदबाट त्यो ढुङ्गाको दूरी पत्ता लगाउनु होस् ।
2. तपाई आफूले देख्नुभएको आफ्नो गाउँ वा आफू बस्ने ठाउँको प्रतिष्ठित स्थल (मठ, मन्दिर वा स्तम्भ) को त्रिकोणमितिय सुत्र प्रयोग गरी उचाइ पत्ता लगानुहोस् ।
3. आफ्नो घरको भऱ्याङको झुकाव वा ढल्काइ कति छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण : 5

60 m. व्यास भएको एउटा वृत्ताकार खेतको बिचमा एउटा स्तम्भ गाडिएको छ । उक्त खेतको परिधिको एउटा बिन्दुबाट सो स्तम्भको टुप्पोमा हेर्द 60^0 को कोण बन्दछ भने उक्त स्तम्भको उचाई पत्ता लगाउनुहोस् ।

सामाधान :

मानौं, 0 वृत्ताकार खेतको केन्द्र विन्दु छ । OB स्तम्भको उचाई र A परिधिमा पर्ने कुनै एउटा

विन्दु छ ।

प्रश्नानुसार, $\angle OAB = 60^0$, $OA = \frac{1}{2} \times 60m$

$= 30$ m

$OB = ?$

समकोण त्रिभूज BOA मा

$$\tan 60^0 = \frac{OB}{OA}$$

अथवा, $\sqrt{3} = \frac{OB}{30}$

अथवा, $30\sqrt{3} = OB$

त्यसैले, स्तम्भको उचाई $30\sqrt{3}$ मिटर छ ।

अभ्यास : 5

1. एउटा वृत्ताकार पोखरीको व्यास $16\sqrt{3}$ मिटर छ । यसको बिचमा (केन्द्रमा) खम्बा उभ्याइएको छ । एउटा 1.5 मि. अग्लो मानिसले पोखरीको किनाराबाट उक्त खम्बाको उत्तांश कोण 60^0 पाउँछ भने पानीको सतहमाथि खम्बाको उचाई पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. एउटा वृत्ताकार पोखरीको बिचमा एउटा खम्बा उभ्याइएको छ । पानीको सतहबाट खम्बाको उचाई 3 मिटर र पोखरीको किनाराबाट खम्बाको टुप्पाको उन्नतांश 60^0 भए पोखरीको अर्धव्यास निकाल्नुहोस् ।

6. **पृष्ठपोषण (अभ्यासको लामो उत्तर आउने प्रयोग सम्बन्धी प्रश्नहरूका)**
   - (क) र (ख) लाई उदाहरण (1) अध्ययन गरी समाधान गर्नुहोला ।
   - (ग), (घ) र (ङ) लाई उदाहरण (2) अध्ययन गरी समाधान गर्नुहोला ।
   - (च) र (छ) लाई उदाहरण (3) अध्ययन गरी समाधान गर्नुहोला ।
   - (ज) लाई उदाहरण (4) लाई अध्ययन गरी समाधान गर्नुहोला ।
   - (झ) र (ञ) लाई समाधान गर्न आ-आफ्नो बस्ने स्थानमा गएर समाधान गर्नुहोला ।

7. **सारांश** :
   - ❍ त्रिकोणमितिय अनुपातका कोणहरूको मान
   - ❍ उचाइ तथा दूरी सम्बन्धी समस्या हल गर्ने त्रिकोणमितिय अनुपातहरूको धारणा स्पष्ट पार्नु पर्छ । साथै समस्यालाई राम्रो पढी समस्यालाई समकोण त्रिभूज (right angle triangle) मा बदली चित्र बनाउन नबिर्सनुहोस् ।

एकाइ : 17

तथ्याङ्क शास्त्र (Statistics)

1. **परिचय :**

यस एकाइमा तथ्याङ्क शास्त्र अन्तर्गतका वर्गीकृत तथ्याङ्कको मध्यक तथा चतुर्थाम्सीय मानहरू (मध्यिका, पहिलो चतुर्थामा र तेस्रो चतुर्थामा) सँग सम्बन्धित समस्याहरू उदाहरण सहित समावेश गरिएको छ ।

2. **सिकाई उपलब्धि :**

यस पाठको अध्ययनपछि निम्नलिखित कार्य गर्न सक्षम हुनेछ :

(क) वर्गीकृत तथ्याङ्कबाट सूत्र प्रयोग गरी मध्यक, मध्यिका र चर्तुथांशीय मानहरू निकाल्न,

(ख) सङ्कलित तथ्याङ्कहरूको प्रशोधनका मध्यमानहरूको प्रयोगबाट निश्कर्ष निकाल्न ।

A : मध्यक (Mean)

3. **आधारभूत विषय वस्तु :**

(क) कुनै तथ्याङ्कको औषत मानलाई मध्यमान (Mean) भनिन्छ । यसलाई अङ्क गणितीय मध्यक पनि भनिन्छ ।

(ख) तथ्याङ्कलाई तिन भागमा विभाजन गरिएको छ ।

(i) वैयक्तिक श्रेणी (Individual Series) जस्तै

(ii) खण्डित श्रेणी (Discrete Series)

(iii) अविच्छिन्न श्रेणी (Continuous Series)

(ग) वैयक्तिक श्रेणीबाट मध्यक निकाल्दा निम्नानुसार निकालिन्छ ।

$$\text{Mean } (\overline{X}) = \frac{X_1 + X_2 + X_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + X_n}{N} = \frac{\Sigma X}{N}$$

(घ) खण्डित श्रेणीबाट मध्यक निकाल्दा निम्नानुसार निकालिन्छ ।

$$\text{Mean } (\overline{X}) = \frac{f_1X_1 + f_2X_2 + f_3X_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + f_nX_n}{f_1 + f_2 + f_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + f_n} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fX}{N}$$

(ङ) अविच्छिन्न श्रेणीबाट मध्यक निकाल्दा निम्नानुसार निकालिन्छ ।

$$\text{Mean } (\overline{X}) = \frac{f_1m_1 + f_2m + f_3m_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + f_nm_n}{f_1 + f_2 + f_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + f_n} = \frac{\Sigma fm}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fm}{N}$$

जस्मा, मध्यमान $(m) = \frac{\text{Lower limit + Upper limit}}{2}$ [श्रेणीको ठिक बिचको मान हो]

Σfm = मध्यविन्दु र बारम्बारताको गुणनफलको जोड

N = बारम्बारताको जोड

4. **मुख्य विषय वस्तु :**

4.1. **तथ्याङ्क वर्गीकरण मान**

उदाहरण : 1

वैयक्ति श्रेणीमा अङ्क गणितीय मध्यक निकाल्ने सुत्र लेख्नुहोस् ।

समाधान

मध्यक $(\overline{X}) = \frac{X_1 + X_2 + X_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + X_n}{N}$ वा $\frac{\Sigma X}{N}$

अभ्यास : 1

१. खण्डित श्रेणीबाट अङ्क गणितीय मध्यक निकाल्ने सुत्र लेख्नुहोस् ।

२. अविच्छित श्रेणीबाट मध्यक निकाल्ने सुत्र लेख्नुहोस् ।

३. अविच्छिन्न श्रेणीमा मध्य विन्दु (m) कसरी निकालिन्छ ?

उदाहरण : 2

एउटा निरन्तर श्रेणीमा मध्यक $(\overline{X}) = 19 + 2m$ र $\Sigma fx = 133 + 14m$ पदहरूको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मध्यक (Mean) $(\overline{X}) = \frac{\Sigma fX}{N}$

अथवा, $19 + 2m = \frac{133 + 14m}{N}$

अथवा, $N = \frac{133 + 14m}{19+2m}$

अथवा, $N = \frac{7(19 + 2m)}{(19+2m)}$

$\therefore N = 7$

∴ आवश्यक पद सङ्ख्या 7 हुन्छ ।

अभ्यास : 2

1. एउटा निरन्तर श्रेणीमा मध्यक $(\overline{X}) = 15 + a$ र $\Sigma fx = 420 + 28a$ भए पदहरूको सङ्ख्या (N) पत्ता लगाउनुहोस् । [उत्तर N= 28]

2. यदि $\Sigma fx = 650$ र $N = 13$ भए मध्यक $(\overline{X})$ पत्ता लगाउनुहोस् । [उत्तर : $\overline{X} = 50$]

3. यदि $N = 30 + k, \Sigma fx = 1350$ र $(\overline{X}) = 30$ भए k को मान पत्ता लगाउनु होस् ।

[उत्तर : $k = 15$]

4. यदि 14, x+2, x+4, 30, 32 को मध्यक $(\overline{X}) = 24$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

[उत्तर : $x = 19$]

उदाहरण : 3

तल दिइएको आँकडाबाट श्रेणी अन्तर 10 मा बारम्बारता तालिका बनाई मध्यक पनि निकाल्नुहोस् ।

23, 3, 17, 28, 39, 52, 16, 21, 29, 25, 41, 33, 9, 19, 34, 59, 7, 11, 51, 31, 22, 41, 32, 55, 18

समाधान :

श्रेणी (x)	**बारम्बारता** (f)	**मध्य विन्दु** (m)	f.x
0-10	3	5	15
10-20	5	15	75
20-30	6	25	150
30-40	5	35	175
40-50	2	45	90
50-60	4	55	220
	N = 25		$\Sigma fm = 725$

अब, मध्यक $(\overline{X}) = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{725}{25} = 29$

दिइएको कुनै पनि वर्गीकृत तथ्याङ्कहरूबाट माथि (उदाहरण 2) मा उल्लेख गरिएको विधिबाट अङ्क गणितीय मध्यक निकाल्न सकिन्छ तर ठूला ठूला सङ्ख्याहरू भएको तथ्याङ्कमा सधैँ यो तरिकाबाट मध्यक निकाल्दा Calculation गर्न गाह्रो हुन्छ । त्यसैले यस्तो वर्गीकृत तथ्याङ्कबाट मध्यक निकाल्ने अर्को तरिका पनि छ । यसलाई छोटो तरिका पनि भनिन्छ । यस तरिकाबाट मध्यक निकाल्दा एउटा मध्यविन्दु (Mid value) लाई मध्यक मानी हिसाब गर्ने गरिन्छ । यसरी मानिएको मध्यकलाई कल्पित मध्यक (Assumed Mean) भनिन्छ । यसलाई 'a' ले जनाउने गरिन्छ । कल्पित मध्यकको प्रयोग गर्दा प्रत्येक मध्य विन्दु (m) बाट कल्पित मध्यक 'a' घटाउँदा आएको फरकलाई 'd' ले जनाउने गरिन्छ । यस तरिकाबाट मध्यक पत्ता लगाउँदा निम्नलिखित सूत्र प्रयोग गरिन्छ ।

$(\overline{X}) = a + \frac{\Sigma fd}{N}$

यहाँ, a = कल्पित मध्यक

Σfd = फरक (d) र बारम्बारता (f) को गुणनफलको योग

N = बारम्बारताको कूल योग हुन्छ ।

यदि वर्गान्तर i छ भने, मध्यक निकाल्ने सूत्र निम्नानुसारहुन्छ ।

$(\overline{X}) = a + \frac{\Sigma fd}{N} \times i$

यहाँ, $d^1 = \frac{d}{i}$ र i = वर्गान्तर हुन्छ ।

उदाहरण : 3 (**दोस्रो तरिका**)

मानौ कल्पित मध्यक (a) = 35

श्रेणी (x)	**बारम्बारता** (f)	**मध्यविन्दु** (m)	d = m - a	f.x
0-10	3	5	5 - 35 = -30	-90
10-20	5	15	15 - 35 = -20	-100
20-30	6	25	25 - 35 = -10	-60
30-40	5	35	35-35 = 0	0
40-50	2	45	45-35 = 10	20
50-60	4	55	55-35 = 20	80
	N = 25			Σfd = -150

अब, मध्यक $(\overline{X}) = a + \frac{\Sigma fd}{N} = 35 + \frac{-150}{25} = 35 - 6 = 29$

उदाहरण : 3 (**तेस्रो तरिका**)

यहाँ, मानौ कल्पित मध्यक (a) = 25 i = 10

श्रेणी (x)	**बारम्बारता** (f)	**मध्यविन्दु** (m)	d = (m-a)	$d^I = \frac{d}{i}$	$f.d^I$
0-10	3	5	5 - 35 = -20	-2	-6
10-20	5	15	15 - 25 = -10	-1	-5
20-30	6	25	25 - 25 = 0	0	0
30-40	5	35	35-25 = 10	1	5

40-50	2	45	45-25 = 20	2	4
50-60	4	55	55-25 = 30	3	12
	N = 25				$\Sigma fd^I = 10$

अब, मध्यक $(\overline{X}) = a + \frac{fd^1}{N} \times i$

$= 25 + \frac{10}{25} \times 10$

$= 25 + 4$

$= 29$

उदाहरण : 4

मध्यक 41.5 भए X को मान निकाल्नुहोस् ।

X	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
f	3	4	X	15	3	5

समाधान :

यहाँ, मध्यक $(\overline{X}) = 41.5$

श्रेणी (x)	**बारम्बारता** (f)	**मध्यविन्दु** (m)	f.m
10-20	3	15	45
20-30	4	25	100
30-40	X	35	35X
40-50	15	45	675
50-60	3	55	165
60-70	5	65	325
	N = X+30		$\Sigma fm = 35X+1310$

अब, मध्यक $(\overline{X}) = \frac{fm}{N}$

or, $41.5 = \frac{35X+1310}{X+30}$

or, $41.5X + 1245 = 35X + 1310$

or, $41.5X - 35X = 1310 - 1245$

or, $6.5X = 65$

or, $x = \frac{65}{6.5}$

$\therefore$ $x = 10$

अभ्यास : 4

1. तल दिइएको आँकडाबाट 10 श्रेणीको अन्तरमा बारम्बारता तालिका बनाई मध्यक निकाल्नुहोस् ।

   (i) 7, 47, 36, 39, 31, 19, 41, 49, 9, 51, 29, 22, 59, 17, 49, 21, 24, 12, 31, 8, 36, 18, 32, 16, 23 [उत्तर : 28.6]

   (ii) 5, 21, 17, 29, 39, 51, 16, 21, 29, 26, 41, 33, 9, 19, 59, 58, 8, 11, 51, 31, 22, 24, 41, 33, 56, 18, 47, 32, 12, 33, 52 [उत्तर : 30.81]

2. तल दिइएको तथ्याङ्कका मध्यक कति हुन्छ ? निकाल्नुहोस् ।

   (i)

प्राप्ताङ्क	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
विद्यार्थी सङ्ख्या	1	3	6	3	2

[उत्तर : 28.84]

   (ii)

प्राप्ताङ्क	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160
विद्यार्थी सङ्ख्या	8	10	7	12	7	6

[उत्तर : 128.64 kg]

3. तल दिइएको आँकडाको अङ्क गणितीय मध्यक 32.5 भए X को मान कति हुन्छ ?

   (i)

प्राप्ताङ्क (X)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	5	15	20	x	20	10

[उत्तर : $x = 30$]

   (ii)

उमेर	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
मानिसको सङ्ख्या	3	8	15	m	4

[उत्तर : $m = 10$]

6. पृष्ठपोषण

1. (क), (ख) र (ग) का लागि आधारभूत विषय वस्तुको अध्ययन गरी समाधान गर्नुहोस् ।
2. (क), (ख), (ग) र (घ) का लागि उदाहरण (2) लाई अध्ययन गरी सोही अनुसार समाधान गर्नुहोस् ।
3. 1(i), 1(ii), 2(i) र 2(ii) लाई समाधान गर्न उदाहरण (3) लाई अध्ययन गरी समाधान गर्नुहोस् ।
4. प्रश्न नं. (3) र (4) का लागि उदाहरण (4) अध्ययन गरी समाधान गर्नुहोस् ।

7. सारांश

वर्गीकृत तथ्याङ्कमा मध्यमान पत्ता लगाउने चरण

- विभिन्न वर्गको मध्यविन्दु 'm' को मान पत्ता लगाउने
- प्रत्येक वर्गको मध्यमानलाई वारम्वारताले गुणन गरी गुणनफल Σfx गणना गर्ने (m र x ले एउटै राशीको मानलाई जनाउँछ,
- योगफल Σfm अथवा Σfx लाई वारम्वारताहरूको योगफल Σf or N ले भाग गरिन्छ ।
- अविच्छिन्न श्रेणीको मध्यक निकाल्ने छोटो तरिकामा प्रयोग हुने सुत्रहरू

$$(\bar{X}) = a + \frac{\Sigma fd}{N}$$

वा

$$(\bar{X}) = a + \frac{\Sigma fd^1}{N} \times i$$

B : मध्यिका तथा चर्तुथांशहरू (Median and Quartiles)

3. आधारभूत विषयवस्तु

यस पाठको अध्ययनका लागि सहज होस् भनी निम्नानुसारका आधारभूत विषयवस्तुहरु प्रस्तुत गरिएका छन् ।

(क) वैयक्तिक श्रेणी (Individual Series) मा पहिलो चतुर्थांश (Q_1) वा मध्यिका (M_d) वा तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) निकाल्दा,

- सर्वप्रथम दिइएको आँकडालाई सानोदेखि ठूलोसम्म मिलाएर (बढ्दो क्रममा) राख्ने गरिन्छ ।
- त्यसपछि (Q_1) वा (Q_2) वा (Q_3) कुन स्थान पर्छ भनी थाहा पाउनका लागि चतुर्थांशको सूत्र प्रयोग गरिन्छ । जस्तै :

पहिलो चतुर्थांश पर्ने स्थान $(Q_1) = \frac{N+1}{4}$औ पद

मध्यिका वा दोस्रो चतुर्थांश पर्ने स्थान $M_d(Q_2) = 2\left(\frac{N+1}{4}\right)$औ पद, वा $\left(\frac{N+1}{2}\right)$औं पद

तेस्रो चतुर्थांश पर्ने स्थान $(Q_3) = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$औ पद

माथिका (Q_1) वा (Q_2) वा (Q_3) पर्ने स्थानको सूत्र प्रयोग गरी सकेपछि आएको उत्तर दशमलवमा भएमा दशमलव विन्दु भन्दा अगाडिको अङ्कको आधारमा पद छानिन्छ । दशमलव भन्दा पछाडिको अङ्कलाई प्रतिशतको रुपमा लिने गरिन्छ । जस्तैः पहिलो चतुर्थांश पर्ने स्थान = 3.75 औ पद भएमा,

Q_1 = तेस्रो पद + (चौथो पद - तेस्रो पद) × 75% अनुसार हिसाब गरिन्छ ।

(ख) खण्डित श्रेणी (Discrete Series) मा, पहिलो चतुर्थांश (Q_1) वा दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) वा तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) निकाल्दा,

- सर्वप्रथम दिइएको आँकडालाई सानोदेखि ठूलोसम्म बढ्दो क्रममा मिलाएर तालिकामा प्रस्तुत गरिन्छ ।
- उक्त तालिकाबाट सञ्चित बारम्बारता/Cumulative Frequency (c.f.) निकालिन्छ ।
- त्यसपछि (Q_1) वा (Q_2) वा (Q_3) पर्ने स्थानको सूत्र प्रयोग गरिन्छ ।

जस्तैः

पहिलो चतुर्थांश पर्ने स्थान $Q_1 = \frac{N+1}{4}$औं पद

दोस्रो चतुर्थांश पर्ने स्थान $Q_2 = 2\left(\frac{N+1}{4}\right)$औं पद, वा $\left(\frac{N+1}{2}\right)$औ पद

तेस्रो चतुर्थांश पर्ने स्थान $Q_3 = 3(\frac{N+1}{4})$औ पद

माथिका (Q_1) वा (Q_2) वा (Q_3) पर्ने स्थानको सूत्र प्रयोग गरिसकेपछि, आएको उत्तरको आधारमा सञ्चित बारम्बारता Cumulative Frequency (c.f.) भएको लहरमा हेरिन्छ ।

यदि औ पदको सूत्र लगाउँदा आएको उत्तर र सञ्चित बारम्बारताको अंक एउटै भएमा त्यही तालिकाको अगाडिको अङ्क (X) को लहरको अङ्कलाई Q_1 वा Q_2 वा Q_3 को मानको रुपमा लिइन्छ ।

तर, ...औ पदको सूत्र लगाउँदा आएको उत्तर र सञ्चित बारम्बारताको अङ्क एउटै नाभएमा, औ पदको अङ्क भन्दा सञ्चित बारम्बारताको अङ्क नजिकैको ठूलोलाई आधार मानेर त्यसको प्राप्ताङ्क (x) लाई Q_1, Q_2 वा Q_3 को मानको रुपमा लिइन्छ ।

(ग) निरन्तर वा अविच्छिन्न श्रेणी (Contineous Series) मा, पहिलो चतुर्थांश (Q_1) वा दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) वा तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) निकाल्दा,

- सर्वप्रथम दिइएको आँकडालाई सानोदेखि ठूलोसम्म बढ्दो क्रममा मिलाएर सञ्चित बारम्बारता तालिका तयार गरिन्छ ।
- त्यसपछि (Q_1) वा (Q_2) वा (Q_3) कुन स्थानमा पर्छ भनी, निम्न मध्ये कुनै एउटा सूत्र प्रयोग गरिन्छ ।

  पहिलो चतुर्थांश पर्ने स्थान $Q_1 = \frac{N}{4}$ औं पद, वा

  दोस्रो चतुर्थांश पर्ने स्थान $Q_2 = 2\left(\frac{N}{4}\right)$ औं पद, वा $\left(\frac{N}{2}\right)$औं पद

  तेस्रो चतुर्थांश पर्ने स्थान $Q_3 = 3(\frac{N}{4})$ औं पद

माथिको (Q_1) वा (Q_2) वा (Q_3) पर्ने स्थानको पदको आधारमा नजिकैको ठूलो सञ्चित बारम्बारता चयन गरी त्यसबाट वर्गान्तर पत्ता लगाइन्छ । यसबाट वर्गान्तर वा श्रेणी मात्र थाहा हुने हुनाले, वर्गभित्रको निश्चित मान मात्र थाहा पाउन थप सूत्रको प्रयोग गरिन्छ । जस्तैः

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - c.f.}{f} \times i$$

$$Md(Q_2) = L + \frac{\frac{2N}{4} - c.f.}{f} \times i \ \{ l = \text{lower range}; i = \text{internal} \}$$

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - c.f.}{f} \times i$$

जहाँ,

L = आवश्यक वर्गको तल्लो मान

N = जम्मा सङ्ख्या

c.f. = आवश्यक वर्गको c.f. भन्दा अघिल्लो c.f.

f = आवश्यक वर्गको बारम्बारता

4. मूख्य विषयवस्तु

(क) अविच्छिन्न श्रेणी (Continuous series)

यसमा चल (Variable) का विभिन्न समूहहरु दिइएका हुन्छन् । ती समूहहरुले नै बारम्बारताको समूह निर्धारण गरेको हुन्छ । दिइएका चलका समूहहरुलाई वर्गीकृत समूह पनि भनिन्छ । कहिलेकाही वर्गान्तर (वर्गहरुको अन्तर) बराबर नभएको पनि हुन सक्छ । त्यसो

भएमा वर्गान्तर बराबर बनाउनु पर्दछ । यसमा अन्य श्रेणीमा जस्तै प्रकृया अपनाउँदा कुन वर्गमा पऱ्यो भन्ने मात्र थाहा हुन्छ, तर त्यो वर्ग भित्रको निश्चित मान कुन हो भनी पत्ता लगाउन थप प्रकृया अपनाउनु पर्दछ ।

उदाहरण : 1

तल दिइएको आँकडाबाट पहिलो चतुर्थांश (Q_1) निकाल्नुहोस् ।

श्रेणी अन्तर (Class Interval) (N)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
बारम्बारता (Frequency) (f)	2	4	14	15	6	4

यहाँ,

श्रेणी अन्तर (C.I.)	बारम्बारता (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f.)
0-5	2	2
5-10	4	6
10-15	14	20
15-20	15	35
20-25	6	41
25-30	4	45
	$\Sigma f = N = 45$	

अब,

पहिलो चतुर्थांश पर्ने स्थान $= \frac{N}{4}$औं पद

$= \frac{45}{4}$औं पद

$= 11.25$औं पद

पहिलो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तर $= (10\text{-}15)$

$\therefore$ पहिलो चतुर्थांशको मान (Q_1) $= L + \frac{\frac{N}{4} - c.f.}{f} \times i$

$= 10 + \frac{\frac{45}{4} - 6}{14} \times 5$

$= 10 + \frac{11.25 - 6}{14} \times 5$

$= 10 + \frac{5.25}{14} \times 5$

Q_1, Q_2, Q_3 पत्ता लगाउन वर्गान्तरमा पहिलो कुन स्थानमा पर्छ, पत्ता लगाउने $\frac{N}{4}$, $\frac{N}{2}$, $3\left(\frac{N+1}{4}\right)$, चतुर्थांशको पत्ता लगाउने ।

$Q_1 = L + \frac{N}{4}$ - Cfxi

$Q_2 = \frac{N}{2}$

$Q_3 = \frac{A(N-1)}{4}$

$= 10 + \frac{26.25}{14}$

$= 10 + 1.88$

$= 11.88$

माथिको आँकडाबाट दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) पत्ता लगाउँदा,

L	=	आवश्यक वर्गको तल्लो मान
N	=	जम्मा संख्या
C.f.	=	आवश्यक वर्गको C.f भन्दा अघिल्लो C.f.
f.	=	आवश्यक वर्गको बारम्बारता

दोस्रो चतुर्थांश पर्ने स्थान $= 2\left(\frac{N}{4}\right)$औ पद

$= 2\left(\frac{45}{4}\right)$औ पद

$= 2\ (11.25)$औ पद

$= 22.5$औ पद

दोस्रो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तर $= (15\text{-}20)$

दोस्रो चतुर्थांशको मान (md) $= L + \frac{2\frac{N}{4} - c.f.}{f} \times i$

or (f) $= 15 + \frac{2\left(\frac{45}{4}\right) - 20}{15} \times 5$

$= 15 + \frac{2\ (11.25) - 20}{15} \times 5$

$= 15 + \frac{22.5\text{-}20}{15} \times 5$

$= 15 + \frac{2.5}{15} \times 5$

$= 15 + \frac{12.5}{15}$

$= 15 + 0.83$

$= 15.83$

माथिकै आँकडाबाट तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) पत्ता लगाउँदा

तेस्रो चतुर्थांश पर्ने स्थान $= 3\left(\frac{N}{4}\right)$औ पद

$= 3\left(\frac{45}{4}\right)$औ पद

$= 3\ (11.25)$औ पद

$= 33.75$ औ पद

तेस्रो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तर $= (15\text{-}20)$

तेस्रो चतुर्थांशको मान $= L + \frac{3\frac{N}{4} - c.f.}{f} \times i$

$$= 15 + \frac{3\left(\frac{45}{4}\right) - 20}{15} \times 5$$

$$= 15 + \frac{3\,(11.25) - 20}{15} \times 5$$

$$= 15 + \frac{33.75 - 20}{15} \times 5$$

$$= 15 + \frac{13.75}{15} \times 5$$

$$= 15 + \frac{68.75}{15}$$

$$= 15 + 4.58$$

$$= 19.58$$

नोट: दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) र (Md) मध्यिका मान एउटै हुने भएकोले मध्यिका निकाल्न पनि (Q_2) निकाल्दा जस्तै समाधान गर्न सकिन्छ । अर्थात तलका चरणहरु पूरा गरेर पनि गर्न सकिन्छ ।

मध्यिका पर्ने स्थान $= \left(\frac{N}{4}\right)$औ पद,

मध्यिका पर्ने वर्गान्तर $= (\quad)$

मध्यिका मान $(Md) = L + \frac{\frac{N}{2} - c.f.}{f} \times i$

उदाहरण : 2

दिइएको आँकडाको मध्यिका 24 भए, x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

वर्गान्तर	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	9	21	x	15	10

समाधान,

माथिको तथ्याङ्कलाई तलको तालिका राख्न सकिन्छ ।

यहाँ,

वर्गान्तर (C.I.)	बारम्बारता (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f.)
0-10	9	9
10-20	21	30
20-30	x	30 + x

30-40	15	45 + x
40-50	10	55 + x
	Σf=N=x + 55	

मध्यिका मान 24 भएका कारणले,

मध्यिका पर्ने वर्गान्तर = (20-30)

अब, मध्यिका मान $(Md) = L + \frac{\frac{N}{2} - c.f.}{f} \times i$

अथवा, $24 = 20 + \frac{\frac{x+55}{2} - 30}{x} \times 10$

अथवा, $24 - 20 = \frac{x+55-60}{2x} \times 10$

अथवा, $4 = \frac{x-5}{2x} \times 10$

अथवा, $8x = 10x - 50$

अथवा, $8x - 10x = -50$

अथवा, $-2x = -50$

$\therefore x = 25$

अभ्यास : 5

1. तलको आँकडाबाट मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्राप्ताङ्क (x)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55
विद्यार्थी सङ्ख्या	3	5	9	3	2

[उत्तरः मध्यिका = 28.33]

2. तलको आँकडाबाट पहिलो चतुर्थांश (Q_1) पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्राप्ताङ्क (x)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
विद्यार्थी सङ्ख्या(f)	30	40	60	70	100

[उत्तरः $Q_1 = 40.83$]

3. तल दिइएको तथ्याङ्कबाट तेस्रो चतुर्थांश निकाल्नुहोस् ।

ज्याला (रु. मा)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
कामदारको सङ्ख्या	6	4	10	8	7	5

[उत्तरः $Q_3 = 85.71$]

4. तलको तालिकाबाट तल्लो चतुर्थांश पत्ता लगाउनुहोस् ।

श्रेणी (Class)	4-12	12-20	20-28	28-36	36-44	44-52	52-60
बारम्बारता (Frequency)	12	22	34	40	22	15	5

[उत्तरः $Q_1 = 20.82$]

5. दिइएको आँकडाको मध्यिका मान 35 भए P को मान निकाल्नुहोस् ।

प्राप्ताङ्क	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
विद्यार्थी सङ्ख्या	4	8	P	20	18	6

[उत्तरः $P = 12$]

6. दिइएको आँकडाबाट माथिल्लो चतुर्थांश निकाल्नुहोस् ।

वर्गान्तर	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	7	5	13	12	4

[उत्तरः $Q_3 = 34.79$]

7. दिइएको आँकडाबाट पहिलो चतुर्थांश पत्ता लगाउनुहोस् ।

वर्गान्तर	0-10	0-20	0-30	0-40	0-50
बारम्बारता	5	11	18	27	38

[उत्तरः $Q_1 = 17.5$]

(ख) सञ्चित बारम्बारता बक्रबाट मध्यिका र चतुर्थांशहरुको आँकलन वर्गीकृत तथ्याङ्कको सञ्चित बारम्बारता वक्र दिइएको अवस्थामा पनि मध्यिका र चतुर्थांशहरु आँकलन गर्न सकिन्छ । यो सरल तथा छोटो तरिका हो ।

सञ्चित बारम्बारता बक्र रेखालाई दुई किसिमबाट देखाउन सकिन्छ ।

(i) भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता बक्र रेखा

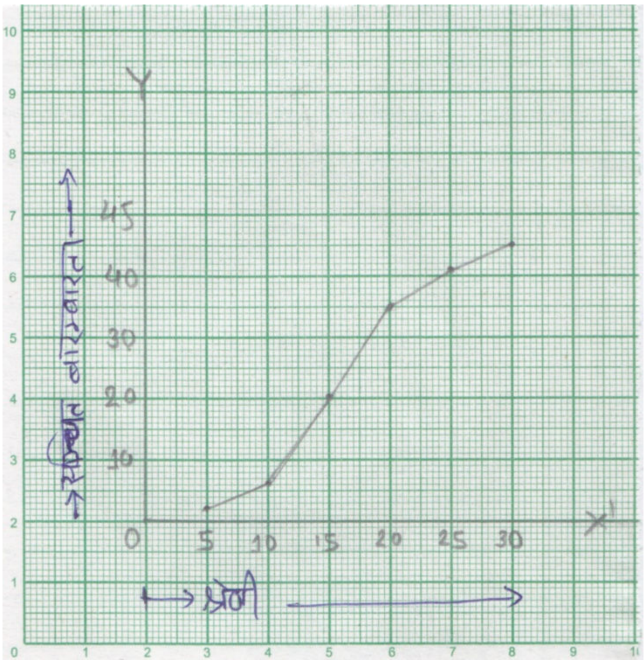
(ii) भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता बक्र रेखा

उदाहरण (1) मा दिइएको आँकडालाई भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा,

वर्गान्तर (C.I.)	बारम्बारता (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f.)	भन्दा कम
0-5	2	2	5
5-10	4	6	10
10-15	14	20	15
15-20	15	35	20

20-25	4	45	30
	N = 45		

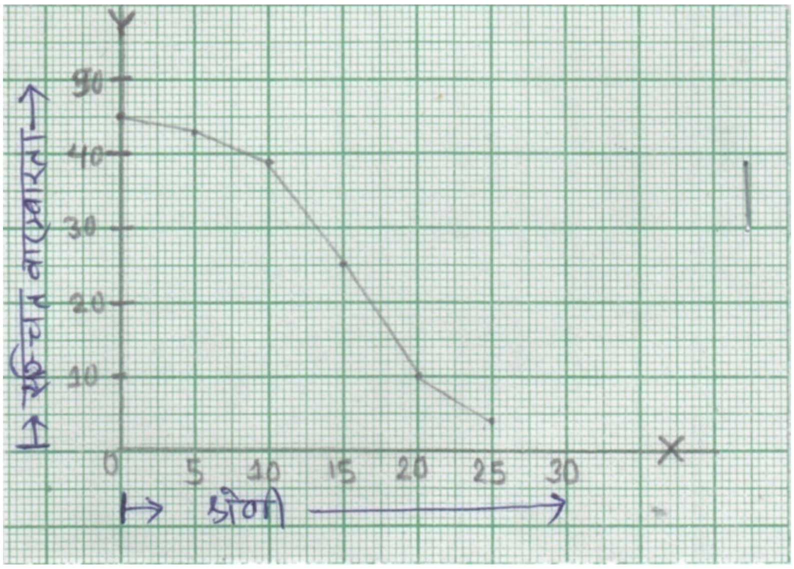
अब, लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा



फेरि, उदाहरण (1) मा दिइएको आँकडालाई भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गरी लेखा चित्रमा प्रस्तुत गर्दा

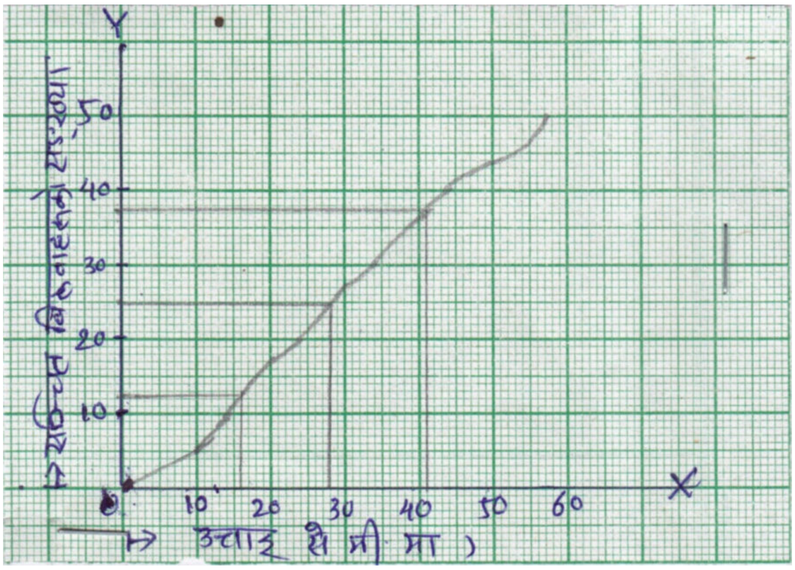
श्रेणी अन्तर (C.I.)	बारम्बारता (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f.)	भन्दा बढी
0-5	2	45	0
5-10	4	45 - 2 = 43	5
10-15	14	43 - 4 = 39	10
15-20	15	39 - 14 = 25	15
20-25	6	25 - 15 = 10	20
25-30	4	10 - 6 = 4	25
	N = 45		

फेरि, लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा,



उदाहरण : 3

दिइएको सञ्चित बारम्बारता वक्रबाट पहिलो चतुर्थांश (Q_1), दोस्रो चतुर्थांश (Q_2), तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) पर्ने श्रेणी पत्ता लगाउनुहोस् ।



यहाँ, दिइएको सञ्चित बारम्बारता वक्र अनुसार,

जम्मा बिरुवाको सङ्ख्या (N) $= 50$

अब, पहिले चतुर्थांश पर्ने स्थान $= \left(\frac{N}{4}\right)$औ पद

$= \left(\frac{50}{4}\right)$औ पद

$= 12.5$औ पद

∴ पहिलो चतुर्थांश पर्ने श्रेणी $= (10\text{-}20)$

फेरि तेस्रो चतुर्थांश पर्ने स्थान $= 2\left(\frac{N}{4}\right)$औ पद

$= 2\left(\frac{50}{4}\right)$औ पद

$= 2(12.5)$औ पद

$= 25$औ पद

∴ दोस्रो चतुर्थांश पर्ने श्रेणी $= (20 - 30)$

∴ मध्यिका र दोस्रो चतुर्थांश पर्ने स्थान एउटै हुनाले, मध्यिका पर्ने श्रेणी $= (20 - 30)$ हुन्छ ।

फेरि दोस्रो चतुर्थांश पर्ने स्थान $= 3\left(\frac{N}{4}\right)$औ पद

$= 3\left(\frac{50}{4}\right)$औ पद

$= 3(12.5)$औ पद

$= 37.5$औ पद

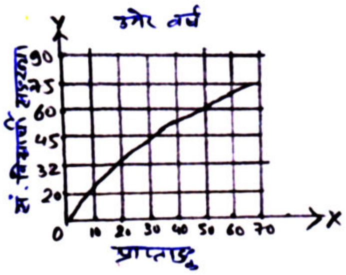
∴ तेस्रो चतुर्थांश पर्ने श्रेणी $= (30 - 40)$

अभ्यास : 3

(क) दिइएको सञ्चित बारम्बारता वक्रबाट तल्लो चतुर्थांश (Q_1) श्रेणी पत्ता लगाउनुहोस् ।

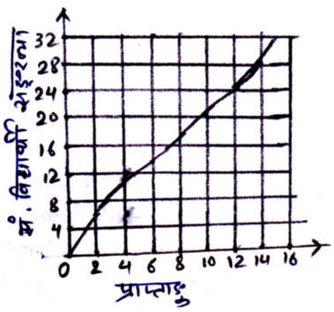
[उत्तर : (15-20)]

(ख) दिइएको सञ्चित बारम्बारता वक्रबाट तेस्रो चतुर्थांशा (Q_3) श्रेणी पत्ता लगाउनुहोस् । [उत्तर : (40 - 50)]



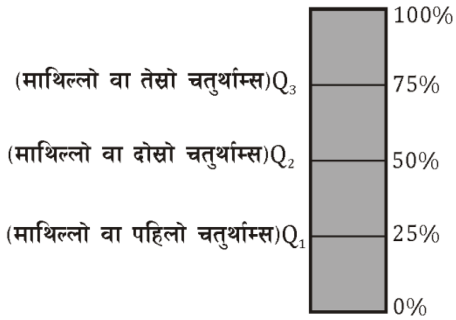
(ग) दिइएको सञ्चित बारम्बारता वक्रबाट मध्यिका (M_d) पर्ने श्रेणी पत्ता लगाउनुहोस् ।

[उत्तर : (6 - 8)]



5. **सारांश :**

गणितीय आँकडाहरुको व्यवस्थापन क्रमवद्ध रुपमा गर्नुपर्दा तिनीहरुलाई बढ्दो क्रम अथवा घट्दो क्रममा मिलाएर राखिन्छ । दिइएको आँकडाको औसत मानको बारेमा सूचना प्रदान गर्दछ । तसर्थ मध्यिका त्यो मान हो जसले सम्पूर्ण आँकडालाई दुई बराबर भागमा विभाजन गर्दछ । मध्यिका भन्दा माथिका मानहरु सबै मध्यिका भन्दा ठूला र मध्यिका भन्दा तलका भागहरु मध्यिका भन्दा साना हुन्छन् । यसरी आँकडाको ठीक बीचमा मध्यिका बस्ने हुनाले यसलाई औषत स्थान मान पनि भनिन्छ । यसलाई Md वा (Q_2) ले जनाइन्छ । यदि सम्पूर्ण आँकडाहरुलाई चार भागमा विभाजन गर्ने हो भने तीनओटा विभाजकहरुको आवश्यकता पर्दछ । ती तीनओटा विभाजकहरुलाई चतुर्थांश भनिन्छ । पूरै आँकडालाई दुई बराबर भागमा बाँड्ने दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) भए जस्तै, पहिलो आधा भागलाई पूनः अरु दुई बराबर भागमा विभाजन गर्ने विभाजकलाई पहिलो चतुर्थांश (Q1) र दोस्रो आधा भागलाई अरु बराबर दुई भागमा बाँड्न विभाजक वा पूरै आँकडाको तीन चौथाइ (75%) भागलाई तेस्रो चतुर्थांश (Q3) भनिन्छ । पहिलो र तेस्रो चतुर्थांशहरु (First and Third Quartiles) लाई क्रमशः Q1 र Q3 ले जनाइन्छ । यसरी पूरै आँकडालाई बढ्दो क्रममा मिलाएर राख्दा Q1, Q2 र Q3 का स्थानमानहरु क्रमशः 25%, 50% र 75% मा पर्दछन् । यसलाई तल दिइएको चित्रबाट प्रस्ट पारिएको छ ।



एकाइ : 18

सम्भाव्यता (Probability)

1. **परिचय :**

यस पाठमा कुनै निश्चित नभएका घटनाहरूको सम्भावित नतिजाहरूको गणितीय आँकलन गर्ने प्रक्रिया हुन्छ । यस पाठमा परीक्षणबाट प्राप्त परिणामहरू, नमुना क्षेत्र र त्यसले बनाउने वृक्षचित्रका बारेमा र तत्सम्बन्धी समस्याहरूमा बढी केन्द्रित गरिनेछ ।

2. **सिकाइ उपलब्धि :**

यस एकाइको अध्ययनपछि निम्नलिखित सिकाई उपलब्धि हासिल हुनेछ :

- पारस्परिक निषेधक (mutually exclusive) घटनाहरूका लागि जोड र गुणन सिद्धान्तको प्रयोग गरी सम्भाव्यता पत्ता लगाउन
- पराश्रित घटना (dependent events) र अनाश्रित घटनाहरूको सम्भाव्यता सम्बन्धी समस्याहरू हल गर्न

3. **आधारभूत विषयवस्तु**

कुनै पनि घटनाद्वारा प्राप्त सम्भाव्यताहरूलाई विश्लेषण गरिने तथ्याङ्कशास्त्रलाई नै सम्भाव्यता भनिन्छ । यसमा धेरै उदाहरणहरू प्रस्तुत गर्न सकिन्छ । जस्तो -

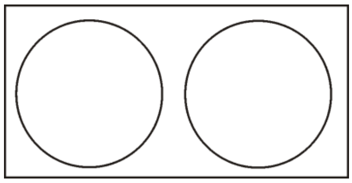
- एउटा पढिरहेको विद्यार्थी परीक्षामा सफल हुने सम्भाव्यता अथवा असफल हुने सम्भाव्यता कति छ ?
- कुनै खेलमा हार वा जितको सम्भाव्यता कति छ ?
- दसकक्षामा पढिरहेका 40 विद्यार्थीहरूमध्ये डोल्मा नै प्रथम हुने सम्भाव्यता कति होला ? आदि ।

सम्भाव्यतामा प्रयोग गरिने केही पारिभाषिक शब्दहरूलाई छोटकरीमा परिमार्जित गर्दा यसको धारणा अझ स्पष्ट हुन सक्दछ ।

- **परीक्षण** : सम्भाव्यताका लागि प्रयोग गर्दा केके परिणामहरू प्राप्त हुन सक्तछ भनी प्रयोग गर्ने प्रक्रिया नै परीक्षण हो । जस्तो एउटा सिक्का उछाल्दा टाउको वा पुच्छर के हुन्छ भनी प्रयोग गर्नु । एउटा घनाकार डाइसलाई उफार्दा 1 देखि 6 सम्म केके पर्दछ भनी प्रयोग गर्नु ।
- **यादृच्छिक परीक्षण (Random Experiment) :** कुनै परीक्षणमा यही नै पर्दछ वा आउँछ भनी पूर्व किटान गर्न नसकिने परीक्षणलाई यादृच्छिक परीक्षण भनिन्छ । जस्तो एउटा झोलामा 3 ओटा उस्तै र उत्रै राता, कालो र सेतो फल राखिएका छन् ।

नहेरीकन एउटा बल निकाल्दा त्यो बल यही रङ्गको पर्दछ भनी सुरुमा किटान वा निश्चित गर्न सकिँदैन ।

समूहसँग सम्बन्धित केही सुत्रहरू



(i) $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$

[अलग्गिएको समूह भएको अवस्थामा]

(ii) $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

[∵ खप्टिएको समूह भएको अवस्थामा]

यसलाई सम्भाव्यता जोडको सिद्धान्त भनिन्छ ।

4. **मुख्य विषय वस्तु :**

(क) **पारस्परिक निषेध घटनाहरूको जोड सिद्धान्त (Additive law for mutually exclusive events)**

कुनै दुई वा दुईभन्दा बढी घटनाहरू एकैसाथ घट्न सक्तैनन् । परीक्षणका क्रममा एउटा घटनाले अर्को घटनालाई निषेध गर्दछ भने त्यस्ता घटनाहरूलाई पारस्परिक निषेधक घटनाहरू भनिन्छ ।

जस्तो : एउटा सिक्कालाई उछाल्दा (उफार्दा) एकैपटकमा टाउको (H) अथवा पुच्छर (T) आउन सक्तैन । टाउको (H) आएमा पुच्छर (T) आउँदैन र पुच्छर (T) आएमा टाउको (H) आउँदैन । टाउको (H) ले पुच्छर (T) लाई निषेध गर्दछ भने पुच्छर (T) ले टाउको (H) लाई निषेध गर्दछ । अतः कुनै पनि परीक्षणमा एउटा घटनाको सम्भाव्यताले अर्को घटनालाई निशेष गर्दछ भने त्यस्ता घटनालाई पारस्परिक निशेध घटनाहरू भनिन्छ ।

यदि A र B दुइओटा पारस्परिक निषेधक घटनाहरू हुन भने $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$ हुन्छ । त्यस्तै यदि A, B र C तिनओटा पारस्परिक निषेधक घटनाहरू हुन् भने $P(A \text{ or } B \text{ or } C) = P(A) + P(B) + P(C)$ हुन्छ । यस नियमलाई सम्भाव्यताको जोड सिद्धान्त भनिन्छ ।

उदाहरण : 1

एउटा बाकसमा 5 ओटा सेता र 7 ओटा राता र 4 ओटा काला उस्तै उत्रै बलहरू राखिएका छन् । एउटा बल नहेरी थुत्दा सो बल

(i) सेतो बल पर्ने सम्भाव्यता निकाल्नुहोस् ।

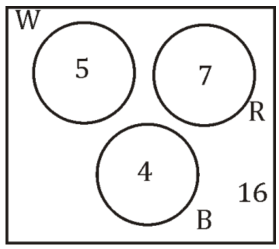
(ii) रातो बल पर्ने सम्भाव्यता निकाल्नुहोस् ।

(iii) कालो बल पर्ने सम्भाव्यता निकाल्नुहोस् ।

समाधान :

जम्मा बलको सङ्ख्या = 16 ओटा

सेतो बल आउने सम्भावना $P(w) = \frac{\text{अनुकुल परिणाम संख्या}}{\text{जम्मा परिणाम संख्या}}$



(i) सेतो बल पर्ने सम्भाव्यता $[P(w)] = \left(\frac{5}{16}\right)$

(ii) रातो बल पर्ने सम्भाव्यता $[P(R)] = \left(\frac{7}{16}\right)$

(iii) कालो बल पर्ने सम्भाव्यता $[P(B)] = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

अभ्यास : 1

1. एउटा तासको प्याकेटबाट एउटा पत्ती नहेरीकन थुत्दा सो पत्ती रातो गुलाम अथवा राजा पर्नेसम्भाव्यता कति छ ? [**उत्तर** : $\frac{3}{26}$]

2. एउटा बाकसमा 10 ओटा रातो, 7 ओटा कालो र 5 ओटा हरियो उस्तै उत्रै बलहरू राखिएका छन् । एउटा बल नहेरिकन थुत्दा सो बल रातो वा हरियो बल पर्ने सम्भाव्यता कति होला ? [**उत्तर** : $\frac{15}{22}$]

उदाहरण : 2

एउटा झोलामा 5 देखि 25 सम्म लेखिएका उस्तै र उत्रै सङ्ख्या पत्तीहरू राखिएका छन् । नहेरिकन एउटा पत्ती निकाल्दा सो पत्ती 5 अथवा 7 को गुणाङ्क हुने सम्भाव्यता कति छ ?

समाधान

5 का गुणाङ्कहरू = 5, 10, 15, 20, 25

7 का गुणाङ्कहरू = 7,14, 21

5 को गुणाङ्क पर्ने सम्भावना $P(5) = \frac{5}{21}$

7 को गुणाङ्क पर्ने सम्भावना $P(7) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

दुवैमा कुनै साझा सङ्ख्या नहुनाले P(5 को गुणाङ्क अथवा 7 को गुणाङ्क)

$P($5 अथवा 7 को गुणाङ्क $= \frac{5}{21} + \frac{3}{21} = \frac{8}{21}$

अभ्यास :

1. 2 देखि 25 सम्मका सङ्ख्याहरू लेखिएका उस्तै र उत्रै बलहरूबाट नहेरिकन एउटा बल

निकाल्दा वर्गसङ्ख्या वा घनसङ्ख्या पर्ने सम्भाव्यता निकाल्नुहोस् । [उत्तर : $\frac{5}{24}$]

2. 1 देखि 100 सम्म लेखिएका सङ्ख्या पत्तीहरूबाट एउटा सङ्ख्या पत्ती नहेरिकन थुत्दा सो सङ्ख्या 5 ले निशेष भाग जाने सङ्ख्या पर्ने सम्भाव्यता कति होला ? [**उत्तर** : $\frac{1}{5}$]

उदाहरण : 3

एउटा तासको प्याकेटबाट नहेरिकन एउटा पत्ती थुत्दा त्यो पत्ती रानी वा कालो एक्का पर्ने सम्भाव्यता कति होला ? निकाल्नुहोस् ।

जम्मा तासको सङ्ख्या पत्ती = 52 ओटा

रानी पत्ती = 4 ओटा

कालो एक्का पत्ती = 2 ओटा

रानी वा कालो एक्का पत्ती पर्ने सम्भाव्यता [P(Q) or P(Black Ace)]

$$= \left(\frac{4}{52}+\frac{2}{52}\right)=\frac{6}{52}=\frac{3}{26}$$

अभ्यास : 3

1. राम्रोसँग फिटिएको 52 पत्ति भएको एक सेट तासबाट एउटा तास झिकियो । उक्त पत्ति राजा वा एक्का पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? [**उत्तर**ः $\frac{2}{13}$]

2. राम्ररी फिटिएको 52 पत्तीको एक गड्डी तासबाट एउटा पत्ती नहेरीकन थुत्दा सो थुतिएको पत्ती मिस्सी अथवा गुलाम पर्ने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् । [**उत्तर**ः $\frac{2}{13}$]

उदाहरण : 4

2 देखि 30 सम्मका सङ्ख्या पत्तीहरूमा एउटा सङ्ख्या पत्ती नहेरीकन थुत्दा सो सङ्ख्या पत्ती रुढ सङ्ख्या वा बिजोर सङ्ख्या पर्ने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

जम्मा सङ्ख्या पत्तीहरू = (90 - 1) = 29 ओटा $\therefore n(5) = 29$

रुढ सङ्ख्या पत्तीहरू = {2, 3, 4, 7, 11, 15, 17, 19, 23, 29}

जम्मा रुढ सङ्ख्या पत्ती = 10 ओटा $\therefore n(P) = 10$

बिजोर सङ्ख्याहरू = {3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29}

जम्मा बिजोर सङ्ख्या = 14 ओटा $\therefore n(O) = 14$

रुढ सङ्ख्या र बिजोर सङ्ख्याहरूको साझा पत्तीहरू = {3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29}

रुढ सङ्ख्या र बिजोर सङ्ख्याहरूको साझा पत्ती = 9 ओटा $\therefore n(P \cap O) = 9$

एउटा सङ्ख्या पत्ती थुत्दा रुढ सङ्ख्या अथवा बिजोर सङ्ख्या पत्ती पर्ने सम्भाव्यता [P(Prime Number or Odd Number)]

$$= P(P) + P(O) - P(P \cap O)$$

$$= \frac{10}{29} + \frac{14}{29} - \frac{9}{29}$$

$$= \frac{15}{29}$$

अभ्यास : 4

1. 3 देखि 19 सम्म लेखिएका सङ्ख्या पत्तीहरूबाट एउटा पत्ती नहेरिकन थुत्दा सो सङ्ख्या पत्ती 4 को गुणाङ्क अथवा 5 को गुणाङ्क पर्ने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् । (उत्तर : $\frac{7}{17}$)

2. एउटा विद्यालयको कक्षा दसमा अध्ययनरत विद्यार्थीहरूको तौल लिँदा निम्नअनुसार प्राप्त गरिएको छ ।

तौल (कि.ग्रा.)	38	43	48	53	58	63	68
सङ्ख्या	8	6	10	15	11	7	3

उक्त समूहबाट एउटा मात्र विद्यार्थी छान्दा सो विद्यार्थी

(i) 48 कि.ग्रा. भन्दा कम तौल भएको — उत्तर : 1/5

(ii) 58 कि.ग्रा. भन्दा बढी तौल भएको — उत्तर : 1/7

(iii) 63 कि.ग्रा. भन्दा कम तौल भएको — उत्तर : 5/7

(iv) 43 र 43 कि.ग्रा. भन्दा बढी तौल भएको — उत्तर : 26/35

(v) 53 र 53 भन्दा कम तौल भएको । — उत्तर : 7/10

विद्यार्थी पर्ने सम्भाव्यता कति कति होला निकाल्नुहोस् ।

(ख) **अनाश्रित घटनाहरूको गुणन सिद्धान्त (Multiplicative Law for Independent Events)**

कुनै परीक्षणमा प्राप्त दुई वा सोभन्दा बढी घटनाहरूमा एउटा घटनाको परिणामले अर्को घटनाको परिणामलाई कुनै असर पार्दैन भने त्यस्ता घटनाहरूलाई अनाश्रित घटना (Independent events) भनिन्छ ।

जस्तो (i) एउटा सिक्कालाई तीनपटक उछाल्दा (उफार्दा) पहिलोपटक H (टाउको) आयो भने दोस्रोपटक H (टाउको) अथवा T (पुच्छर) आउन सक्तछ, त्यस्तै तेस्रोपटक T (पुच्छर) वा H (टाउको) आउन सक्तछ । यसरी पहिलो परिणामले दोस्रो वा तेस्रो परिणाममा कुनै असर गर्दैन । यस किसिमको घटना अनाश्रित घटनामा पर्दछ ।

यदि A र B दुइओटा अनाश्रित घटनाहरू हुन भने A र B दुवैको एकै साथ आउने सम्भाव्यतालाई $P(A\,B) = P(A) \times P(B)$ हुन्छ ।

यहाँ P(A) भनेको पहिलो घटनामा A आउने सम्भाव्यता र P(B) भनेको दोस्रो घटनामा B आउने सम्भाव्यता हो ।

त्यसै गरी $P(A, B, C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$ हुन्छ ।

पराश्रित घटना (Dependent Events) :

कुनै परीक्षणमा हुने पहिलो घटनाको सम्भाव्यताले अर्को घटनालाई असर गर्दछ वा निर्भर गर्दछ भने त्यस किसिमको घटनालाई पराश्रित घटना भनिन्छ ।

जस्तो : एउटा थैलोमा 7 ओटा रातो र 5 ओटा सेतो उस्तै र उत्रै बलहरू राखिएका छन् । नहेरीकन पालोपालो गरी दुई बलहरू थुत्दा (पुनः नराखी)

(i) दुवैपटक रातो बल पर्ने

(ii) दुवैपटक सेतो बल पर्ने

(iii) पहिलोपटक रातो त्यसपछि सेतो बल पर्ने सम्भाव्यताहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(i) $= P(R, R) = P(R_1) \times P(R_2)$

$= \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$

(ii) $= P(W, W) = P(W_1) \times P(W_2)$

$= \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{5}{33}$

(iii) $= P(R, W) = P(R) \times P(W)$

$= \frac{7}{12} \times \frac{5}{11} = \frac{35}{132}$

उदाहरण : 5

एउटा सिक्का र एउटा डाइसलाई एकै पटक उछाल्दा (उफार्दा) सिक्कामा पुच्छर र डाइसमा 4 आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, सिक्कामा भएको सतह $= \{H, T\}$

सिक्कामा भएको जम्मा सतहको सङ्ख्या = 2 ओटा

डाइसमा भएको सतह $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

डाइसमा भएको जम्मा सतहको सङ्ख्या = 6 ओटा

सिक्कामा पुच्छर र डाइसमा 4 आउने सम्भाव्यता [P(T4)]

$= P(T) \times P(4) \qquad = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \qquad = \frac{1}{12}$

उदाहरण : 6

कुनै गणितीय समस्या, रात, सिता र गीताले समाधान गर्न सक्ने क्षमता $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ र $\frac{1}{5}$ क्रमशः छन् । समस्या दिइयो भने तिनै जनाबाट समाधान हुने सम्भाव्यता कति होला ? साथै उक्त समस्या तिन जना कुनैले समाधान गर्न सक्ने सम्भाव्यता पनि निकाल्नुहोस् ।

समाधान

रामले समस्या समाधाना गर्ने सम्भाव्यता $P(R) = \frac{1}{3}$

सिताले समस्या समाधान गर्ने सम्भाव्यता $P(S) = \frac{1}{4}$

सिताले समस्या समाधान गर्ने सम्भाव्यता $P(G) = \frac{1}{5}$

गिताले समस्या समाधान गर्ने सम्भाव्यता V(RSG)

$$= P(R) \times P(S) \times P(G)$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \qquad = \frac{1}{60}$$

फेरि,

रामले समस्या समाधान गर्न नसक्ने सम्भाव्यता $P(\overline{R}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

रामले समस्या समाधान गर्न नसक्ने सम्भाव्यता $P(\overline{S}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

रामले समस्या समाधान गर्न नसक्ने सम्भाव्यता $P(\overline{G}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

रामले समस्या समाधान गर्न नसक्ने सम्भाव्यता $P(\overline{G}\,\overline{S}\,\overline{G})$

$$= P(\overline{R}) \times P(\overline{S}) \times P(\overline{G})$$
$$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \qquad = \frac{2}{5}$$

∴ तीन जनामध्ये कुनै एकले समस्या समाधान गर्ने सम्भाव्यता

$$P(\text{Slove}) = 1 - \frac{2}{5} \qquad = \frac{3}{5}$$

अभ्यास : 6

1. 52 पत्तीको एक प्याकेट तासबाट एउटा पत्ती थुत्दा एक्का वा रानी पर्ने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. एउटा झोलामा उस्तै र उत्रै 10 ओटा हरिया र 6 ओटा काला बलहरू छन् । उक्त झोलाबाट नहेरीकन एउटा बल निकालेर पुनः त्यही झोलामा सो बललाई फिर्ता गरेर अर्को बल निकाल्दा पहिलो बल कालो र दोस्रो बल हरियो हुने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. एउटा गणितीय समस्यालाई दुईजना विद्यार्थीहरू A र B ले समाधान गर्ने सम्भाव्यता क्रमशः $\frac{1}{2}$ र $\frac{1}{5}$ छन् भने त्यो समस्या दुई जना कुनैले समाधान गर्न सक्ने सम्भाव्यता निकाल्नुहोस् ।

(ग) पराश्रित घटना (Depedent Events)

कुनै परीक्षणमा हुने पहिलो घटनाको सम्भाव्यताले अर्को घटनालाई असर गर्दछ वा निर्भर गर्दछ भने त्यस किसिमको घटनालाई पराश्रित घटना भनिन्छ ।

उदाहरण : 7

एउटा थैलोमा 7 ओटा रातो र 5 ओटा सेतो उस्तै र उत्रै बलहरू राखिएका छन् । नहेरीकन पालोपालो गरी बलहरू थुत्दा (पुनः नराखी

(i) दुवै पटक रातो बल पर्ने ।

(ii) दुवै सेतो बल पर्ने ।

(iii) पहिलो पटक रातो त्यसपछि सेतो बल पर्ने सम्भाव्यताहरू पत्ता लगाउनु होस् ।

(a) $P(R, R) = P(R_1) \times P(R_2)$

$$= \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$$

(b) $P(W, W) = P(W_1) \times P(W_2)$

$$= \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{5}{33}$$

(c) $P(R, W) = P(R) \times P(W)$

$$= \frac{7}{12} \times \frac{5}{11} = \frac{35}{132}$$

अभ्यास : 7

1. एउटा झोलामा 5 आटा रातो, 4 ओटा नीलो र 3 ओटा सेता बलहरू राखिएका छन् । पालैपालो पहिलो तीन ओटा बलहरू झिक्दा (दोहोऱ्याएर झोलामा नराख्दा) रातो बल मात्र पर्ने सम्भाव्यता निकाल्नुहोस् । [उत्तर : $\frac{1}{22}$]

2. कुनै थैलीमा 6 वटा कालो र 4 वटा सेता बलहरू छन् । दुई ओटा बलहरू एकपछि अर्को गर्दै झिकियो भने दुई ओटै सेता बल पर्ने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् । [उत्तर : $\frac{2}{15}$]

3. 52 पत्ती भएको एक प्याकेट तासबाट नहेरीकन पालैपालो दुईओटा पत्तीहरू निकाल्दा दुवै पत्ती अनुहार भएको तास पर्ने सम्भावना पत्ता लगाउनु होस् । [उत्तर : $\frac{33}{676}$]

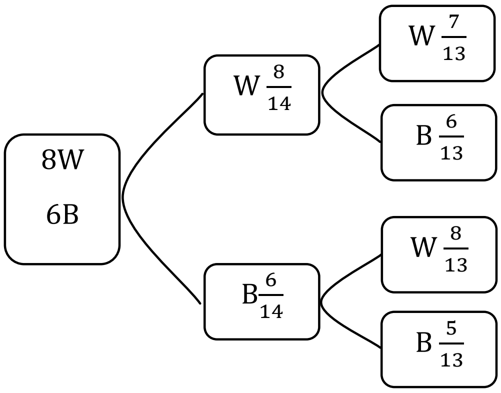
(घ) **वृत्तचित्र (Tree Diagram)**

उदाहरण : 8

एउटा झोलामा 8 ओटा सेता र 6 ओटा कालो उस्तै र उत्रै कलमहरू राखिएका थिए । नहेरीकन दुईओटा कलमहरू पालोपालो निकाल्दा (पुनः नराखी) बन्ने सबै सम्भाव्यताहरूलाई वृक्षचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । साथै दुवैपटक कालो बल आउने सम्भाव्यतासमेत पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

वृक्षचित्र



$$P(B, B) = \left(\frac{6}{14} \times \frac{5}{13}\right)$$

$$P(B, B) = \left(\frac{15}{91}\right)$$

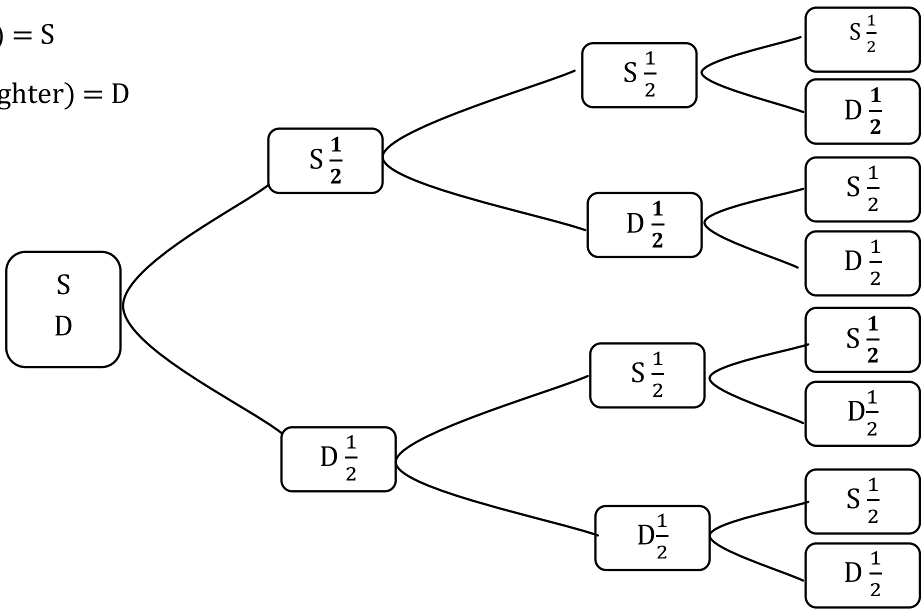
उदाहरण : 9

एउटा दम्पतीबाट चारवर्षको अन्तरमा जन्मदा बन्ने तीनओटा बच्चाहरूको सम्भाव्यतालाई वृक्षचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । साथै कम्तीमा दुईओटा छोराहरू हुने सम्भाव्यतासमेत निकाल्नुहोस् ।

छोरा (Son) = S

छोरी (Daughter) = D

वृक्षचित्रमा,



तीनओटा बच्चाहरूमा कम्तीमा दुईओटा छोराहरू जन्मने सम्भाव्यता निकाल्दा,

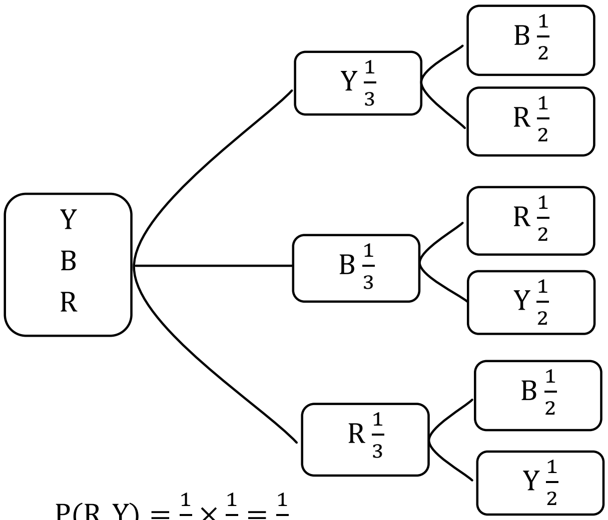
$$P(SSS, SSD, SDS, DSS) = \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण : 10

एउटा बाकसमा एउटा पहेँलो, एउटा कालो र एउटा रातो उस्तै र उत्रै पेन्सिलहरू राखिएका थिए । नहेरिकन क्रमशः दुईओटा पेन्सिलहरू निकाल्दा (पुनः नराखी) बन्ने सम्भाव्यतालाई वृक्षचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । साथै सुरुमा रातो र त्यसपछि पहेँलो पेन्सिल पर्ने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :



$$P(R, Y) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

अभ्यास : 8, 9, 10

1. एउटा थैलीमा 10 ओटा हरिया र 8 ओटा नीला बलहरू राखिएका थिए । नहेरीकन दुईओटा बलहरू (पुनः नराखी) झिक्दा बन्ने सबै सम्भाव्यताहरूलाई वृक्षचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । साथै दुवै पटक एउटै रङ्गका बलहरू आउने सम्भाव्यतासमेत पत्ता लगाउनुहोस् । **उत्तर** : $\frac{73}{153}$

2. एउटा दम्पत्तीबाट फरक-फरक समयमा जन्मेका तीनओटा बच्चाहरूमा हुन सक्ने सबै सम्भाव्यतालाई वृक्षचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । साथै कम्तिमा एउटा छोरी हुन सक्ने सम्भाव्यता समेत पत्ता लगाउनुहोस् । **उत्तर** : $\frac{73}{153}$

3. एउटा सिक्कालाई तीनपटक उछाल्दा बन्ने सबै सम्भाव्यताहरूलाई वृक्षचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । साथै कम्तिमा एउटा टाउको (Head) आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ निकाल्नुहोस् ।

उत्तर : $\frac{7}{8}$

4. रातो, सेतो र हरियो तीनओटा उस्तै र उत्रै बलहरू राखिएको टोकरीबाट नहेरिकन (पुनः नराखी) दुईओटा बलहरू थुत्दा बन्ने सबै सम्भाव्यतालाई वृक्षचित्रमा प्रस्तुत् गर्नुहोस् र सुरुमा हरियो बलआई अर्को कुनै रङ्गको बल पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? निकाल्नुहोस् । **उत्तर :** $\frac{2}{3}$

5. दुईओटा लङ्गुर बुर्जा एकैपटक उफार्दा पहिलोमा बिजोर सङ्ख्या अथवा योग 7 हुने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् । **उत्तर** : $\frac{2}{3}$

6. एउटा सिक्का र लङ्गुरबुर्जा एकैपटक फाल्दा सिक्कामा गाई र लङ्गुर बुर्जामा **1** अथवा **6** पर्ने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् । **उत्तर** :$\frac{2}{3}$

7. एउटा टोकरीमा **4** ओटा राम्रा र **3** ओटा खराब सुन्तलाहरू छन् । यदि दुईओटा सुन्तलाहरू पालैपालो एकएक गरेर पुनः नदोहोऱ्याई झिक्दा दुबै सुन्तला राम्रो पर्ने सम्भाव्यता वृक्ष चित्रको सहयोगबाट पत्ता लगाउनुहोस् । **उत्तर** : $\frac{2}{7}$

6. पृष्ठपोषण

(क) अभ्यास ५.१ को (क), (ख), (ग), (घ), (ङ) र (च) लाई उदाहरण (1) देखि उदाहरण (4) सम्म अध्ययन गरी समाधान गर्नुहोस् ।

(ख) अभ्यास ५.२ को (क), (ख) र (ग) लाई उदाहरण (5) र उदाहरण (6) अध्ययन गरी समाधान गर्नुहोस् ।

(ग) अभ्यास ५.३ को (क), (ख) र (ग) लाई उदाहरण (7) हेरी समाधान गर्नुहोस् ।

(घ) अभ्यास ५.४ को (क), (ख), (ग), (घ), (ङ), (च) र (छ) लाई उदाहरण (8), (9) र (10) अध्ययन गरी समाधान गर्नुहोला ।

7. सारांश

- सम्भाव्या सम्बन्धी समस्या समाधान गर्न अनाश्रित तथा पराश्रित घटना राम्रोसँग बुझ्नु पर्छ ।
- सम्भाव्यता वृक्षचित्र निर्माण गर्दा आउने परिणामलाई विचार गर्नुपर्छ ।
- परीक्षणबाट प्राप्त हुन सक्ने परिणामलाई नमूना क्षेत्र भनिन्छ । जस्तै एउटा सिक्कालाई दुईपटक उछाल्दा प्राप्त हुने परिणाम {HH, TT, HT, TH} यसबाट अन्य प्रश्नको जवाफ दिन सजिलो हुन्छ ।